

# Práctica 1 - Espacios Vectoriales

1. Demuestre que  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ) es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}$ ) con la suma y el producto por un escalar usuales.
2. ¿Es  $\mathbb{C}^n$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales?
3. Compruebe que el conjunto de matrices de orden  $p \times q$  a coeficientes reales (complejos)  $\mathbb{R}^{p \times q}$  ( $\mathbb{C}^{p \times q}$ ) es un espacio vectorial real (complejo) con la suma y el producto por un escalar usuales.
4. Probar que el conjunto de polinomios a coeficientes reales  $\mathcal{P}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales.
5. Probar que el conjunto de funciones continuas a valores reales definidas en el intervalo  $[a, b]$ , que denotamos  $\mathcal{C}[a, b]$ , es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales.
6. Suponga que  $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$  y que  $b \in \mathbb{R}^p$ . ¿Qué condición debe cumplir  $b$  para que el conjunto  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^q : Ax = b\}$  sea un subespacio de  $\mathbb{R}^q$ ?
7. Empleando la respuesta al ejercicio anterior determine cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios que se indican.
  - a)  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_2 - x_1 = 0\}$ .
  - b)  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0\}$ .
  - c)  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0 \wedge x_1 - 2x_3 + x_4 = 1\}$ .
8. Demuestre que  $\mathcal{P}_n$ , el conjunto formado por el polinomio nulo y por los polinomios de grado menor o igual a  $n$ , es un subespacio de  $\mathcal{P}$ .
9. Determine cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios vectoriales que se indican.
  - a)  $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = [1 + r \ r \ 4r]^T, r \in \mathbb{R}\}$ .
  - b)  $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = [r \ 2r]^T, r \geq 0\}$ .
  - c)  $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A \text{ es singular}\}$ .
  - d)  $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(2)\}$ .
  - e)  $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$ .
  - f)  $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : [f(x)]^2 = f(x)\}$ .

10. Sean  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  subespacios de un espacio vectorial  $V$ . Qué condición debe cumplirse para que  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  también sea subespacio?
11. Determine si  $\mathbb{R}^3$  está generado por los vectores  $v_1 = [1 \ -1 \ 2]^T$ ,  $v_2 = [-1 \ 0 \ 3]^T$ ,  $v_3 = [0 \ -1 \ 5]^T$  y  $v_4 = [3 \ -2 \ 2]^T$ .
12. Encuentre los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para que los vectores  $[1 \ k \ 0]^T$ ,  $[1 \ k - 1 \ k]^T$  y  $[2 \ 2k - 1 \ k^2 + k + 1]^T$  sean linealmente dependientes en  $\mathbb{R}^3$ .
13. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son linealmente independientes en el espacio vectorial que se indica.
- $\{[1 \ i]^T, [i \ -1]^T\}$  en  $\mathbb{C}^2$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.
  - $\{2, 3 + t, 2 - t^2\}$  en  $\mathcal{P}$ .
  - $\{1, 2 + 2t, 1 - t + t^2, 2 - t^2\}$  en  $\mathcal{P}$ .
  - $\{\text{sen}(x), \cos(x)\}$  en  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ .
  - $\{\text{sen}^2(x), \cos^2(x), 1\}$  en  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ .
14. ¿Cuál es la dimensión de cada uno de los espacios vectoriales mencionados en los ejercicios 1 a 5? ¿Qué dimensión tiene  $\mathcal{P}_n$ ?
15. Probar que si  $V$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  entonces  $V$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $2n$ .
16. Encuentre bases para los siguientes subespacios:
- $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$ .
  - $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(0) = p(1)\}$ .
  - $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_4 : \int_0^1 p(t) dt = 0\}$ .
  - $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T\}$ .

En cada caso, extienda la base del subespacio que obtuvo a una base del espacio vectorial correspondiente.

17. Encuentre una base del subespacio generado por las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

18. Para cada una de las siguientes matrices  $A$ , halle bases de los subespacios fundamentales:  $\text{Col}(A)$ ,  $\text{Nul}(A)$ ,  $\text{Fil}(A)$  y  $\text{Nul}(A^T)$ . Compare sus dimensiones. Calcule  $\text{rango}(A)$  y  $\text{rango}(A^T)$ .

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{ii) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{iii) } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Sea  $A \in K^{n \times m}$  ( $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ),  $A = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]$  con  $u_i$  la  $i$ -ésima columna de  $A$ . Deducir, a partir del hecho que

$$Ax = x_1 u_1 + x_2 u_2 \cdots + x_m u_m, \quad \text{si } x = [x_1 \ \cdots \ x_m]^T,$$

lo siguiente:

- (a)  $b \in \text{Col}(A)$  si y sólo si existe  $x$  tal que  $Ax = b$ .
  - (b) La ecuación  $Ax = b$  tiene a lo sumo una solución si y sólo si las columnas de  $A$  son linealmente independientes.
  - (c) La ecuación  $Ax = b$  tiene a lo sumo una solución si y sólo si  $\text{rango}(A) = m$ .
  - (d) La ecuación  $Ax = 0$  admite solución no trivial si y sólo si las columnas de  $A$  son linealmente dependientes.
  - (e) La ecuación  $Ax = b$  tiene solución para todo  $b$  si y sólo si  $\text{rango}(A) = n$ .
  - (f) La ecuación  $Ax = b$  tiene solución si y sólo si  $A$  y la matriz ampliada  $\tilde{A} = [A \ b]$  tienen igual rango.
20. Sean  $A \in K^{n \times m}$  ( $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ),  $A = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]$  con  $u_i$  la  $i$ -ésima columna de  $A$  y  $B \in K^{r \times n}$ . Explicar, a partir del hecho que

$$BA = [Bu_1 \ Bu_2 \ \cdots \ Bu_m],$$

por qué  $\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B)$ . Dar ejemplos no triviales ( $A \neq I, 0$ ,  $B \neq I, 0$ ) en los cuales se cumpla la inclusión estricta y otros en donde valga la igualdad.

21. Dados los subespacios de  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 2 \ 0]^T, [2 \ 0 \ 3 \ -1]^T\}$  y  $\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ , hallar bases de  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  y de  $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ .
22. Sean  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  subespacios de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  y  $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ ?
23. Demuestre que  $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^{3 \times 3}$  con  $\mathcal{S}_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T\}$  y  $\mathcal{S}_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = -A^T\}$ . ¿Es cierta la igualdad precedente en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ?
24. i) Determinar si la suma de los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^5$ ,

$$\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1]^T, [2 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1]^T\}, \quad \mathcal{S}_2 = \text{gen}\{[-1 \ 1 \ -2 \ 1 \ 1]^T\}, \quad \mathcal{S}_3 = \text{gen}\{[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]^T\},$$

es directa y hallar una base del mismo.

ii) Idem anterior pero con

$$\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1]^T, [2 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1]^T\}, \quad \mathcal{S}_2 = \text{gen}\{[-1 \ 0 \ -2 \ 1 \ 1]^T\}, \quad \mathcal{S}_3 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2]^T\}.$$

25. Suponga que  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{v_3, v_4, v_5\}$  y  $\{v_6, v_7\}$  son, respectivamente, bases de los subespacios  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  y  $\mathcal{S}_3$  de un espacio vectorial  $V$ . Demuestre que  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$  genera  $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$  y que la suma resulta directa si y sólo si  $B$  resulta base. Generalize.

26. Encuentre las coordenadas de  $v$  en la base ordenada  $B$  en cada uno de los siguientes casos:
- $v = [1 \ 2 \ 3]^T$  y  $B = \{[1 \ 1 \ 0]^T; [1 \ 0 \ 1]^T; [0 \ 1 \ 1]^T\}$ .
  - $v = a + bt + ct^2$  y  $B = \{1 + t + t^2; 1 + t; 1\}$ .
27. Sea  $B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$  una base ordenada del  $K$ -espacio vectorial ( $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ )  $V$  y sea  $c_B : V \rightarrow K^n$  la aplicación que asigna a cada  $v \in V$  su correspondiente vector de coordenadas en la base  $B$ ,  $c_B(v) \in K^n$ .
- Demuestre lo siguiente:
    - $c_B(v + v') = c_B(v) + c_B(v')$  y  $c_B(\alpha v) = \alpha c_B(v)$  para todo  $v, v' \in V$  y para todo  $\alpha \in K$ .
    - $c_B$  es biyectiva.
    - $\{u_1, \dots, u_r\}$  es l.i. en  $V$  si y sólo si  $\{c_B(u_1), \dots, c_B(u_r)\}$  es l.i. en  $\mathbb{R}^n$ .
  - Hallar la expresión de  $c_B^{-1}$ .
28. Resolver los ejercicios 16 y 17 trabajando en coordenadas respecto de una base  $B$  a elección.
29. Sean  $E = \{e_1; \dots; e_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $B = \{v_1; \dots; v_n\}$  una base ordenada de  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cuál es la expresión de la matriz de cambio de coordenadas de la base  $B$  a la base  $E$ ,  $C_{BE}$ ?
30. Supongamos que  $B, B'$  y  $B''$  son tres bases ordenadas del espacio vectorial  $V$ . ¿Cómo puede obtenerse  $C_{BB''}$  a partir de  $C_{BB'}$  y  $C_{B'B''}$ ?
31. Hallar la matriz de cambio de bases  $C_{BB'}$  en los siguientes casos
- $B = \{[1 \ 2 \ 3]^T; [1 \ 0 \ 1]^T; [3 \ 4 \ 6]^T\}$  y  $B' = \{[1 \ -1 \ 0]^T; [1 \ -2 \ 3]; [1 \ 1 \ 0]^T\}$ .
  - $B = \{1; t - 1; (t - 1)^2\}$  y  $B' = \{1; t - 2; (t - 2)^2\}$ .