

Práctica 1 - Espacios Vectoriales

1. Demuestre que \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (\mathbb{C}) con la suma y el producto por un escalar usuales.
2. ¿Es \mathbb{C}^n un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales?
3. Compruebe que el conjunto de matrices de orden $p \times q$ a coeficientes reales (complejos) $\mathbb{R}^{p \times q}$ ($\mathbb{C}^{p \times q}$) es un espacio vectorial real (complejo) con la suma y el producto por un escalar usuales.
4. Probar que el conjunto de polinomios a coeficientes reales \mathcal{P} es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales.
5. Probar que el conjunto de funciones continuas a valores reales definidas en el intervalo $[a, b]$, que denotamos $\mathcal{C}[a, b]$, es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales.
6. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ y que $b \in \mathbb{R}^p$. ¿Qué condición debe cumplir b para que el conjunto $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^q : Ax = b\}$ sea un subespacio de \mathbb{R}^q ?
7. Empleando la respuesta al ejercicio anterior determine cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios que se indican.
 - a) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_2 - x_1 = 0\}$.
 - b) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0\}$.
 - c) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0 \wedge x_1 - 2x_3 + x_4 = 1\}$.
8. Demuestre que \mathcal{P}_n , el conjunto formado por el polinomio nulo y por los polinomios de grado menor o igual a n , es un subespacio de \mathcal{P} .
9. Determine cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios vectoriales que se indican.
 - a) $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = [1 + r \ r \ 4r]^T, r \in \mathbb{R}\}$.
 - b) $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = [r \ 2r]^T, r \geq 0\}$.
 - c) $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A \text{ es singular}\}$.
 - d) $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(2)\}$.
 - e) $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$.
 - f) $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : [f(x)]^2 = f(x)\}$.

10. Sean \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 subespacios de un espacio vectorial V . Qué condición debe cumplirse para que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ también sea subespacio?
11. Determine si \mathbb{R}^3 está generado por los vectores $v_1 = [1 \ -1 \ 2]^T$, $v_2 = [-1 \ 0 \ 3]^T$, $v_3 = [0 \ -1 \ 5]^T$ y $v_4 = [3 \ -2 \ 2]^T$.
12. Encuentre los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que los vectores $[1 \ k \ 0]^T$, $[1 \ k-1 \ k]^T$ y $[2 \ 2k-1 \ k^2+k+1]^T$ sean linealmente dependientes en \mathbb{R}^3 .
13. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son linealmente independientes en el espacio vectorial que se indica.
 - a) $\{[1 \ i]^T, [i \ -1]^T\}$ en \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial.
 - b) $\{2, 3+t, 2-t^2\}$ en \mathcal{P} .
 - c) $\{1, 2+2t, 1-t+t^2, 2-t^2\}$ en \mathcal{P} .
 - d) $\{\sin(x), \cos(x)\}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
 - e) $\{\sin^2(x), \cos^2(x), 1\}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
14. ¿Cuál es la dimensión de cada uno de los espacios vectoriales mencionados en los ejercicios 1 a 5? ¿Qué dimensión tiene \mathcal{P}_n ?
15. Probar que si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n entonces V es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión $2n$.
16. Encuentre bases para los siguientes subespacios:
 - a) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$.
 - b) $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(0) = p(1)\}$.
 - c) $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_4 : \int_0^1 p(t)dt = 0\}$.
 - d) $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T\}$.

En cada caso, extienda la base del subespacio que obtuvo a una base del espacio vectorial correspondiente.

17. Encuentre una base del subespacio generado por las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

18. Para cada una de las siguientes matrices A , halle bases de los subespacios fundamentales: $\text{Col}(A)$, $\text{Nul}(A)$, $\text{Fil}(A)$ y $\text{Nul}(A^T)$. Compare sus dimensiones. Calcule $\text{rango}(A)$ y $\text{rango}(A^T)$.

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}, \text{ ii) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ iii) } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Sea $A \in K^{n \times m}$ ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}), $A = [u_1 \ u_2 \cdots u_m]$ con u_i la i -ésima columna de A . Deducir, a partir del hecho que

$$Ax = x_1 u_1 + x_2 u_2 \cdots + x_m u_m, \quad \text{si } x = [x_1 \cdots x_m]^T,$$

lo siguiente:

- (a) $b \in \text{Col}(A)$ si y sólo si existe x tal que $Ax = b$.
 - (b) La ecuación $Ax = b$ tiene a lo sumo una solución si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.
 - (c) La ecuación $Ax = b$ tiene a lo sumo una solución si y sólo si $\text{rango}(A) = m$.
 - (d) La ecuación $Ax = 0$ admite solución no trivial si y sólo si las columnas de A son linealmente dependientes.
 - (e) La ecuación $Ax = b$ tiene solución para todo b si y sólo si $\text{rango}(A) = n$.
 - (f) La ecuación $Ax = b$ tiene solución si y sólo si A y la matriz ampliada $\tilde{A} = [A \ b]$ tienen igual rango.
20. Sean $A \in K^{n \times m}$ ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}), $A = [u_1 \ u_2 \cdots u_m]$ con u_i la i -ésima columna de A y $B \in K^{r \times n}$. Explicar, a partir del hecho que

$$BA = [Bu_1 \ Bu_2 \cdots Bu_m],$$

por qué $\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B)$. Dar ejemplos no triviales ($A \neq I, 0$, $B \neq I, 0$) en los cuales se cumpla la inclusión estricta y otros en donde valga la igualdad.

21. Dados los subespacios de \mathbb{R}^4 , $\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 2 \ 0]^T, [2 \ 0 \ 3 \ -1]^T\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, hallar bases de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ y de $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.
22. Sean \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$?
23. Demuestre que $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con $\mathcal{S}_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = -A^T\}$. ¿Es cierta la igualdad precedente en $\mathbb{R}^{n \times n}$?
24. i) Determinar si la suma de los siguientes subespacios de \mathbb{R}^5 ,

$$\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1]^T, [2 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1]^T\}, \mathcal{S}_2 = \text{gen}\{[-1 \ 1 \ -2 \ 1 \ 1]^T\}, \mathcal{S}_3 = \text{gen}\{[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]^T\},$$

es directa y hallar una base del mismo.

ii) Idem anterior pero con

$$\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1]^T, [2 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1]^T\}, \mathcal{S}_2 = \text{gen}\{[-1 \ 0 \ -2 \ 1 \ 1]^T\}, \mathcal{S}_3 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2]^T\}.$$

25. Suponga que $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4, v_5\}$ y $\{v_6, v_7\}$ son, respectivamente, bases de los subespacios \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 y \mathcal{S}_3 de un espacio vectorial V . Demuestre que $B = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ genera $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$ y que la suma resulta directa si y sólo si B resulta base. Generalize.

26. Encuentre las coordenadas de v en la base ordenada B en cada uno de los siguientes casos:
- $v = [1 \ 2 \ 3]^T$ y $B = \{[1 \ 1 \ 0]^T; [1 \ 0 \ 1]^T; [0 \ 1 \ 1]^T\}$.
 - $v = a + bt + ct^2$ y $B = \{1 + t + t^2; 1 + t; 1\}$.
27. Sea $B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ una base ordenada del K -espacio vectorial ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) V y sea $c_B : V \rightarrow K^n$ la aplicación que asigna a cada $v \in V$ su correspondiente vector de coordenadas en la base B , $c_B(v) \in K^n$.
- Demuestre lo siguiente:
 - $c_B(v + v') = c_B(v) + c_B(v')$ y $c_B(\alpha v) = \alpha c_B(v)$ para todo $v, v' \in V$ y para todo $\alpha \in K$.
 - c_B es biyectiva.
 - $\{u_1, \dots, u_r\}$ es l.i. en V si y sólo si $\{c_B(u_1), \dots, c_B(u_r)\}$ es l.i. en \mathbb{R}^n .
 - Hallar la expresión de c_B^{-1} .
28. Resolver los ejercicios 16 y 17 trabajando en coordenadas respecto de una base B a elección.
29. Sean $E = \{e_1; \dots; e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n y $B = \{v_1; \dots; v_n\}$ una base ordenada de \mathbb{R}^n . ¿Cuál es la expresión de la matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base E , C_{BE} ?
30. Supongamos que B , B' y B'' son tres bases ordenadas del espacio vectorial V . ¿Cómo puede obtenerse $C_{BB''}$ a partir de $C_{BB'}$ y $C_{B'B''}$?
31. Hallar la matriz de cambio de bases $C_{BB'}$ en los siguientes casos
- $B = \{[1 \ 2 \ 3]^T; [1 \ 0 \ 1]^T; [3 \ 4 \ 6]^T\}$ y $B' = \{[1 \ -1 \ 0]^T; [1 \ -2 \ 3]; [1 \ 1 \ 0]^T\}$.
 - $B = \{1; t - 1; (t - 1)^2\}$ y $B' = \{1; t - 2; (t - 2)^2\}$.