

ALGEBRA II. FIUBA
Segundo cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del trabajo práctico N° 6
(por Fernando Acero con la colaboración de Ada Cammilleri)

Obs.: siempre con K denotamos al conjunto de números reales R o al de los números complejos C .

1. 1) $a = 0, b = \sqrt{2}/2, c = -\sqrt{2}/2$; 2) $a=1, b=i$.
2. Ej. 5: ii), iv), v), y también i), iii) si $|k|=1$; Ej. 6: todas excepto i).
3. Ya realizado en TP2, Ej.28 donde se comprueba que $H = H^T$ y $H H = I$, de modo que $H H^T = H H^T = I$.
4. a). U es unitaria sii $U U^H = U^H U = I$. Así resulta $I = U^H U = U U^H = U^H [U^H]^H = [U^H]^H U^H = \overline{U U^H} = [U^T]^H U^T = U^T [U^T]^H$
 b). $[UV]^H [UV] = V^H U^H U V = V^H V = I = U U^H = UV V^H U^H = [UV] [UV]^H$.
 (justificar todas las igualdades)
5. a). $(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}')) = (P\mathbf{x}, P\mathbf{x}') = [P\mathbf{x}]^T [P\mathbf{x}'] = \mathbf{x}^T P^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T I \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$; si en particular es $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ se tiene $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. (Se ha probado, entonces, que T preserva el p.i.canónico y la norma inducida).
 b) $0 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (T(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}'))$, la segunda igualdad por a).
 c) $\delta_{ij} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = (T(\mathbf{v}_i), T(\mathbf{v}_j))$, la segunda igualdad por a). (El símbolo δ_{ij} vale 1 si $i=j$, y vale 0 si $i \neq j$)
 d). Por definición, S es invariante por T sii $T(S) \subset S$; pero como, en particular, T es inversible, $\dim(T(S)) = \dim(S)$, con lo cual vale $(T(S))=S$.
 Para probar que $T(S^\perp) = S^\perp$ alcanza probar que S^\perp es invariante por T , pues entonces se aplica la primera conclusión a S^\perp . Para cualesquiera $\mathbf{z} \in S^\perp, \mathbf{x} \in S$ vale que $(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = 0$, y por a), entonces que $(T(\mathbf{z}), T(\mathbf{x})) = 0$. Como todo vector de S es de la forma $T(\mathbf{x})$ para algún \mathbf{x} de S , esto permite comprobar que $T(\mathbf{z})$ es ortogonal a todo vector de S y, por lo tanto, $T(\mathbf{z})$ está en S^\perp .
6. Sólo es preciso cambiar T por H , ninguna modificación en el resto.
7. Para probar que $C_{B_1 B_2}$ es unitaria basta ver que sus columnas son ortonormales. Para ésto, calcular $(\text{col}_i(C_{B_1 B_2}), \text{col}_j(C_{B_1 B_2}))$ sabiendo que $\text{col}_i(C_{B_1 B_2}) = [v_i]_{B_2} = ((u_1, v_i), (u_2, v_i), \dots, (u_n, v_i))^T$. Justificar, detallar, completar!. También pruébese el resultado recíproco: *para cualquier P unitaria existen B_1, B_2 tal que P es la matriz de pasaje entre ellas.*
8. a. Si P es la matriz de pasaje de B' a B es $[T]_{B'} = P [T]_B P^{-1} = P [T]_B P^H$, con la segunda igualdad por Ej. 7. y de allí el resultado por el Ej. 4.b).
 b. Es inmediato. (explicar).
9. Puede proponerse (explicitar) una rotación según un eje ortogonal a S o una simetría respecto de S (¿pueden proponerse otras?)
10. Ambas son del tipo $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ con P ortogonal (¿por qué?), luego se aplica el Ej. 5.
11. Se trata de un cálculo de rutina, lo importante es observar que se verifica el Ej. 12.

12. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de P , \mathbf{x} su correspondiente autovector asociado, resulta que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $P\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$; por ej. 5. a) es $\|\mathbf{x}\| = \|P\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ de donde (λ por qué?) es $|\lambda| = 1$. Si ahora también es \mathbf{y} es autovector de P asociado a $\mu (\neq \lambda)$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ tal que $P\mathbf{y} = \mu \mathbf{y}$; se tiene entonces que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (P\mathbf{x}, P\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}, \mu\mathbf{y}) = \overline{\lambda} \mu (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mu/\lambda) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow [1 - (\mu/\lambda)] (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, de donde es $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ (Para la justificación: la primera igualdad por ej.5.a), la segunda por hipótesis, la tercera por axiomas (λ cuáles?) de p.i., la cuarta por ser 1 el módulo de λ (ampliar esta justificación), la conclusión por ser $\mu \neq \lambda$)
 Esto prueba que asociados a *dos* autovalores distintos los correspondientes autovectores de una matriz unitaria son ortogonales; λ prueba también que asociados a n autovalores distintos dos a dos son ortogonales los correspondientes autovectores?.
13. Indicamos los autovalores (y de allí la matriz diagonal) y los autoespacios asociados (y de allí cómo construir la matriz P cuidando la normalización) en cada caso.
- i) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, S_1 = \text{gen} \{(1 \ -1)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ 1)^T\}$;
- ii) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -2, S_1 = \text{gen} \{(1 \ -2 \ 1)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ 1 \ 1)^T\}, S_3 = \text{gen} \{(1 \ 0 \ -1)^T\}$;
- iii) $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -50, S_1 = \text{gen} \{(4 \ -3 \ 0)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(3 \ 4 \ 0)^T\}, S_3 = \text{gen} \{(0 \ 0 \ 1)^T\}$;
- iv) $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 3$ (doble), $S_1 = \text{gen} \{(1 \ 0 \ -1)^T, (0 \ 1 \ 0 \ -1)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T, (0 \ 1 \ 0 \ 1)^T\}$.
14. i). $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, S_1 = \text{gen} \{(1 \ i)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(i \ 1)^T\}$;
- ii). $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, S_1 = \text{gen} \{(1 \ i \ 0)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(i \ 1 \ 0)^T\}, S_3 = \text{gen} \{(0 \ 0 \ 1)^T\}$;
15. i). $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i, S_1 = \text{gen} \{(-1 \ i)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ i)^T\}$;
- ii). $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 1, S_1 = \text{gen} \{(-1 \ i \ 0)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ i \ 0)^T\}, S_3 = \text{gen} \{(0 \ 0 \ 1)^T\}$;
16. a). V (pues $A = P D_A P^T = (P D_A P^T)^T = A^T$);
- b). F ($A = I_n$ es simétrica con único autovalor 1);
- c). V ;
- d). F (ver Ej. 15);
- e). V (pues $A = P D_A P^H = (P D_A P^H)^H = A^H$);
- f). V (pues $A = P D_A P^H \Rightarrow A^k = P (D_A)^k P^H$);
- g). V (pues $A^{-1} = P (D_A)^{-1} P^H$).
17. Proponer dos matrices hermíticas que no conmuten. (λ qué sucede si conmutan?).
18. $B^H B = B^H (B^H)^H = (B^H B)^H$; $B B^H = (B^H)^H B^H = (B B^H)^H$; $B^H A B = B^H A^H B = (B^H A B)^H$.
19. a) Los autovalores de A son $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, y los autoespacios $S_1 = \text{gen} \{(1 \ i)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(i \ 1)^T\}$;
- c) $A^H = (i C)^H = -i C^H = -i (-C) = i C = A$
- d) Como $A = P D_A P^H$ resulta $C = -i A = -i P D_A P^H = P (-i D_A) P^H = P D_C P^H$.
- e) Si n es impar, de $C = -C^T$ resulta $\det(C) = -\det(C)$, de donde $\det(C) = 0$.

20. La simetría de A exige que sus autovalores sean $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ (doble), y sus subespacios propios $S_1 = \text{gen} \{ (1 \ 1 \ 1)^T \}$, $S_2 = [S_1]^\perp$; y de allí resulta A.
21. Debe obtenerse el restante autovalor de A (que debe ser real, pues A es hermítica) y como se sabe que 0 es autovalor de B, algún autovalor μ de A debe satisfacer (ver ej. 18, TP5) $\mu^3 - \mu^2 + \mu - 1 = 0 = (\mu - 1)(\mu^2 + 1)$ lo que sólo es posible con $\mu = 1$; de modo que los autovalores de A son $\mu = 1$, $\lambda = 2$ (doble), restando elegir S_μ y $S_\lambda = [S_\mu]^\perp$, los correspondientes autoespacios, manteniendo la restricción de que S resulte invariante por A. Una posibilidad es asignar $S_\lambda = S = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (1 \ 0 \ -1)^T, \mathbf{v}_2 = (1 \ -2 \ i \ 1)^T \}$, $S_\mu = [S_\lambda]^\perp = \text{gen} \{ \mathbf{v}_3 = (1 \ i \ 1)^T \}$ lo que origina una matriz A; otra podría ser asignar $S_\lambda = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \}$, $S_\mu = [S_\lambda]^\perp = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 \}$ conduciendo a una matriz A'.

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & i & -1 \\ -i & 5 & -i \\ -1 & i & 5 \end{pmatrix}; \quad A' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & -2i & -1 \\ 2i & 8 & 2i \\ -1 & -2i & 11 \end{pmatrix}$$

22. En todos los casos es $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simétrica con elementos a_{ij} dados por i). $a_{11} = 10$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{22} = -3$; ii). $a_{11} = 5$, $a_{12} = a_{21} = 3/2$, $a_{22} = 0$; iii). $a_{11} = 0$, $a_{12} = a_{21} = 1/2$, $a_{22} = 0$.
23. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica con elementos a_{ij} dados por i). $a_{11} = 0$, $a_{12} = a_{21} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$, $a_{13} = a_{31} = 3$, $a_{23} = a_{32} = -4$; ii). $a_{11} = 8$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{22} = 7$, $a_{33} = -3$, $a_{13} = a_{31} = 2$, $a_{23} = a_{32} = -1$; iii). $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 1$, $a_{13} = a_{31} = -1/2$, $a_{23} = a_{32} = 0$.

24. Llamamos A a la matriz (simétrica) de la forma cuadrática, y P a la que tiene por columnas una BON de \mathbb{R}^2 formada con autovectores de A. Para obtener la diagonalización de la forma cuadrática hacemos: $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T A (\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T A \mathbf{P}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D_A \mathbf{y}$, y siendo λ_1, λ_2 los autovalores de A, la forma se expresa así: $\mathbf{y}^T D_A \mathbf{y} = \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2$. La curva de nivel k es el conjunto $C_k = \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2 = k \}$.

a). $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -4$, $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (1 \ 1)^T \}$, $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (-1 \ 1)^T \}$; $6(y_1)^2 - 4(y_2)^2$; en cuanto a las curvas de nivel, resultan ser hipérbolas, con centro en el origen, que cortan el eje y_1 en los puntos $(\pm \sqrt{k/6} \ 0)^T$ si k es positivo, o al eje y_2 $(0 \ \pm \frac{1}{2} \sqrt{-k})^T$ si k es negativo. En el caso $k=0$, resultan ser un par de rectas.

b). $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$, $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (2 \ 1)^T \}$, $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (-1 \ 2)^T \}$; $2(y_1)^2 + 7(y_2)^2$; en cuanto a las curvas de nivel, para $k=0$, es $C_0 = (0 \ 0)^T$ y en el caso, k positivo, elipses centradas en C_0 de ejes definidos por según S_1, S_2 tales que las longitudes de los "radios" mayor (sobre S_1) y menor (sobre S_2) son de valor $\sqrt{k/2}$ ($\sqrt{k/7}$).

f). $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (1 \ -1)^T \}$, $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (1 \ 1)^T \}$; $2(y_2)^2$; en cuanto a las curvas de nivel, $C_0 = S_1$, y el par de rectas paralelas a C_0 a distancia $\sqrt{k/2}$ si k es positivo.

g). Ambos autovalores negativos, las curvas de nivel son elipses en el caso k negativo.

(en cada caso construir la matriz P de la transformación ortogonal $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ de tal modo que represente una rotación del sistema de referencia ($\det P = 1$) e identificar su intensidad α)

25. Llamando A a la matriz (simétrica) de la forma cuadrática, P a la matriz que tiene por columnas una BON de \mathbb{R}^3 formada con autovectores de A, para diagonalizar la forma cuadrática hacemos: $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T A (\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T A \mathbf{P}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D_A \mathbf{y} = \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2 + \lambda_3 (y_3)^2$ siendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los autovalores de A

a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (-2 \ 2 \ 1)^T \}$, $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (2 \ 1 \ 2)^T \}$; $S_3 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_3 = (1 \ 2 \ -2)^T \}$; $3(y_1)^2 + 6(y_2)^2 + 9(y_3)^2$.

b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (0 \ 1 \ -1)^T \}$, $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (2 \ -1 \ -1)^T \}$; $S_3 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_3 = (1 \ 1 \ 1)^T \}$; $2(y_2)^2 + 5(y_3)^2$.

c) $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ (doble), $\lambda_2 = 1$, $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (1 \ -1 \ 0)^T, \mathbf{v}_2 = (1 \ 0 \ -1)^T \}$, $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_3 = (1 \ 1 \ 1)^T \}$;
 $\frac{1}{2} (y_1)^2 - \frac{1}{2} (y_2)^2 + (y_3)^2$.

26. Conviene probar algo un poco más general que este ejemplo particular: *para toda forma cuadrática definida en K^n por $f(x) = x^H A x$ (con A hermítica) es, para cualquier x , $\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq f(x) \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2$ (Prueba: Siendo A hermítica sus autovalores son reales, de modo que podemos ordenarlos así: $\lambda_{\min}(A) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}(A)$, y siendo además A unitariamente diagonalizable existe P unitaria tal que $P^H A P$ es diagonal; de modo que, con la transformación $x=Py$, la forma cuadrática es ahora $x^H A x = (Py)^H A (Py) = y^H (P^H A P) y = y^H D_A y = \sum \lambda_i |y_i|^2$ y como ahora es claro que $\lambda_{\min}(A) \|y\|^2 \leq \sum \lambda_i |y_i|^2 \leq \lambda_{\max}(A) \|y\|^2$ y además $\|x\| = \|y\|$ (pues P es unitaria), resulta que $\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq f(x) \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2$, como se afirmó). Ahora el ejercicio es trivial, véase que los autovalores de A son -1 y 1 .*
27. Primero ver que si λ_1 y λ_2 verifican que $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, ésto es equivalente a $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. Luego considerar: A es definida positiva $\Leftrightarrow \text{traza}(A) > 0$ y $\det(A) > 0 \Leftrightarrow a_{11} + a_{22} > 0$ y $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Ver que estas dos últimas desigualdades se cumplen simultáneamente si, y solo si, $a_{11} > 0$ y $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.
28. Es el ejercicio 9 del TP2.
29. Basta analizar si la matriz que lo define es definida positiva.; a). Sí, pues sus autovalores son $\{2 \pm \sqrt{2}\}$; b). Sí; c). Sí, sus autovalores son 1, 7, 13. (graficar indicando ejes e intensidad de la rotación)
30. Observar que la matriz del p.i es hermítica y definida positiva.
31. Hacemos la prueba en $K^{m \times n}$ reemplazando T por H ; en primer lugar es claro que $G^H = (B^H B)^H = G$; $\forall \mathbf{x} \in K^{m \times 1}$ se tiene que $\mathbf{x}^H G \mathbf{x} = \mathbf{x}^H (B^H B) \mathbf{x} = (\mathbf{x}^H B^H) (B \mathbf{x}) = (B \mathbf{x})^H (B \mathbf{x}) = \|B \mathbf{x}\|^2 \geq 0$, luego G es semidefinida positiva; por otra parte es $\mathbf{x}^H G \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow B \mathbf{x} = \mathbf{0}$ de modo que si las columnas de B son l.i. se tendrá que necesariamente $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, resultando G definida positiva.
Observación: también es válido un resultado recíproco: Si una matriz G es definida positiva existe una matriz regular B tal que $G = B^H B$, pues dado que $G = P D_G P^H$ con P unitaria y autovalores en D_G positivos (¿por qué?), notando $\sqrt{D_G}$ a la matriz diagonal que sobre la diagonal tiene las raíces cuadradas de los elementos de la diagonal de D_G , se tiene el resultado haciendo $B = \sqrt{D_G} P^H$ puesto que $G = P D_G P^H = (\sqrt{D_G} P^H)^H (\sqrt{D_G} P^H)$ siendo B regular (¿por qué?)
32. Una parte no es más que un trivial corolario de la prueba asentada en el ejercicio 26, cuando se reemplaza $\|x\|$ por k ; en cuanto a la localización del máximo (mínimo), basta ver que se alcanza la cota superior (inferior) en cualquier autovector del autoespacio asociado al autovalor máx (mín), mientras su norma sea k . En efecto: si u es un tal autovector asociado al autovalor máximo, $u^H A u = u^H \lambda_{\max} u = \lambda_{\max} \|u\|^2 = \lambda_{\max} k^2$. Para una forma cuadrática $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A \mathbf{x}$ se tiene el resultado: *el mínimo (máximo) de $f(\mathbf{x})$ sujeto a $\|x\| = k$ es $k^2 \lambda_{\min}(A)$ ($k^2 \lambda_{\max}(A)$) y se alcanza en $X_{\min} = \{ \mathbf{x} \in S_{\min} : \|x\| = k \}$ ($X_{\max} = \{ \mathbf{x} \in S_{\max} : \|x\| = k \}$). Así resulta:*

$$25a. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 6 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = -4 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$25b. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 7 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = 2 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$25c. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 2 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = 0 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$26a. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 9 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = 3 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$26b. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 5 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = 0 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad 26c. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 1 \text{ en}$$

$$\left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = -\frac{1}{2} \text{ en } \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge \|\mathbf{x}\|^2 = 1 \}.$$

33. Si aplicamos la sugerencia (el cambio de variables existe pues B es definida positiva), haciendo

la sustitución $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{u}$, con $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la restricción queda expresada $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1$ y la forma es

ahora $\mathbf{u}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}) \mathbf{u}$, problema en todo idéntico al anterior, de modo que aplicamos sus resultados a la matriz $\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}$ y de allí queda

$$[f(\mathbf{x})]_{\max} = -9 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = -27 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Observación: un esbozo de la sugerencia en general : $\exists S$ ortogonal tal que $B = S^T D_B S$ con los autovalores de B positivos, luego puede escribirse $B = S^T \sqrt{D_B} \sqrt{D_B} S$, y llamando $H =$

$S^T (\sqrt{D_B})^{-1}$ se ve de inmediato que $\mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{u}$ transforma la restricción en $\|\mathbf{u}\|^2 = k^2$ y la forma en $\mathbf{u}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}) \mathbf{u}$, problema que se reduce al del ejercicio anterior, puesto que (probarlo) $\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}$ es simétrica.

34. Se aplica directamente lo dicho en el problema anterior y resulta $[f(\mathbf{x})]_{\max} = 4 \text{ en } \left\{ \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\},$

$$[f(\mathbf{x})]_{\min} = 4/3 \text{ en } \left\{ \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{2/3} \end{pmatrix} \right\}. \text{ Observación: dada que la forma a extremar no}$$

es sino el cuadrado de la distancia al origen, y la restricción es la ecuación de una elipse, el problema puede resolverse geoméricamente.

35. Se trata del mismo tipo de problema que venimos tratando en los dos anteriores; dado que se pide extremar la distancia, basta tener presente que el máximo (mínimo) se alcanza en los puntos de la elipse pertenecientes al autoespacio asociado al autovalor mínimo (máximo) y es

$$d_{\max} = 1 / \sqrt{\lambda_{\min}}, \quad d_{\min} = 1 / \sqrt{\lambda_{\max}} :$$

$$[d]_{\max} = 1 \text{ en } \left\{ \pm \begin{pmatrix} \sqrt{30}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \right\}, \quad [f(\mathbf{x})]_{\min} = 1/\sqrt{7} \text{ en } \left\{ \pm \begin{pmatrix} -\sqrt{42}/42 \\ \sqrt{210}/42 \end{pmatrix} \right\}.$$

36. Recordamos que dada $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ de rango r existe una DVS de A , esto es, una matriz unitaria $V \in \mathbb{K}^{m \times m}$, una matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con elementos nulos excepto los primeros r de la "diagonal principal" que son estrictamente mayores que cero, y una matriz unitaria $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tales que $A = U \Sigma V^H$. (es usual ordenar los elementos no nulos de la "diagonal" de Σ de mayor a menor)

$$a). \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b). \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$c). \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$d). A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$e). \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

37. Se aplica el resultado del ejercicio 32 a la matriz $A^H A$, pues $\|T(\mathbf{x})\|^2 = (A\mathbf{x})^H (A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H (A^H A) \mathbf{x}$, luego el máximo (mínimo) valor de $\|T(\mathbf{x})\|^2$ restringido a $\|\mathbf{x}\| = 1$ es el máximo (mínimo) autovalor de $A^H A$ (Y entonces, por definición de valores singulares, el máximo (mínimo) valor de $\|T(\mathbf{x})\|$ restringido a $\|\mathbf{x}\| = 1$ es el máximo (mínimo) valor singular de A) y se alcanza en los vectores de norma 1 del correspondiente autoespacio. (si se tiene una DVS de A tales autovectores se observan en las columnas de V , ver ej. 36). Así resulta que el máximo (mínimo) es el valor $\sqrt{12}$ ($\sqrt{10}$) y se alcanza en $\pm 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ ($\pm 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$). (Resulta importante retener el resultado: El máximo de $\|T(\mathbf{x})\|$ restringido a $\|\mathbf{x}\| = 1$ es el máximo valor singular de A ; tal número es una norma de T , esto es, se define $\|T\|_2 = \text{máximo valor singular de } A$).

38. Efectuamos la prueba en $\mathbb{K}^{n \times m}$; observamos que en la descomposición $A = U \Sigma V^H$ es $\Sigma^H \Sigma \in \mathbb{K}^{m \times m}$ una matriz diagonal, y también lo es $\Sigma \Sigma^H \in \mathbb{K}^{n \times n}$, y que en cualquier caso es $\Sigma^H = \Sigma^T$. Justificar cada igualdad en lo que sigue, detallar, explicar.

$$a). A^{-1} = [U \Sigma V^H]^{-1} = V \Sigma^{-1} U^H. \text{ (observar cómo queda ordenada la diagonal de } \Sigma^{-1} \text{)}$$

$$b). |\det A| = |\det(U)| |\det(\Sigma)| |\det(V^H)| = \prod_{i=1}^n \sigma_i. \text{ Recordar que } |\det(U)| = 1 = |\det(V^H)| \text{ pues son matrices unitarias.}$$

c). Por una lado, $A^H A V = V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H V = V \Sigma^H \Sigma V^H V = V \Sigma^H \Sigma$, es decir $A^H A \mathbf{v}_i = (\sigma_i)^2 \mathbf{v}_i$, siendo \mathbf{v}_i la i -ésima columna de V . Por otro, $A A^H U = U \Sigma V^H V \Sigma^H U^H = U \Sigma \Sigma^H U^H U = U \Sigma \Sigma^H$, es decir que si \mathbf{u}_i es la i -ésima columna de U se tiene $A^H A \mathbf{u}_i = (\sigma_i)^2 \mathbf{u}_i$.

d). $A = U \Sigma V^H$ es una DVS de A si $A^H = V \Sigma^T U^H$ es una DVS de A^H y es claro que $r(\Sigma) = r(\Sigma^T)$. (En particular son iguales los máximos valores singulares, luego $\|A\|_2 = \|A^H\|_2$, según observación del ejercicio 37).

e). Si \mathbf{v} es autovector de A también lo es de $A^H A = A^2$, o sea, \mathbf{v} es no nulo y $A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ y $A^H A \mathbf{v} = A^2 \mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}$. Luego (¿por qué?), luego $\sigma = \sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$.

f). $G = A^H A = V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H = V \Sigma^H \Sigma V^H$ es una DVS de G , siendo entonces $r(G) = r(\Sigma^H \Sigma) = r(\Sigma) = r(A)$, y de allí G es invertible $\Leftrightarrow r(G) = r(A) = m$.

g) $A = U \Sigma V^H$ entonces $PA = PU \Sigma V^H = (PU) \Sigma V^H = U' \Sigma V^H$, con $U' = PU$ matriz unitaria (¿por qué?). Para el otro punto, $A = U \Sigma V^H$ entonces $AP = U \Sigma V^H P = U \Sigma (V^H P) = U \Sigma V'^H$, con $V' = VP^H$ matriz unitaria (¿por qué?).

$$39. \quad c). \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$e). \quad A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

40. Siendo $A = U \Sigma V^H$ una DVS de A o $A = U_r D V_r^H$ una DVS reducida de A , basta hacer $A^+ = V \Sigma^+$ $U^H = V_r D^{-1} U_r^H$ y con ello la solución de norma mínima por mínimos cuadrados de $Ax = b$ es $\hat{x} =$

$$A^+ b. \text{ Resulta } A^+ = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}; \hat{x} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ (observar que la solución pertenece a}$$

$\text{fil}(A)$).

41. Se quiere ver que $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$ coincide con $A^+ = V \Sigma^+ U^H = V_r D^{-1} U_r^H$, cuando $A = U \Sigma V^H$ con Σ de rango m es una DVS de A o bien $A = U_r D V_r^H$ es una DVS reducida de A . Aquí vale que $V_r = V$ ($r = m = \text{rango de } A$) Luego, $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H = (VDU_r^H U_r D V^H)^{-1} VDU_r^H = VD^{-1} V^H VDU_r^H = VD^{-1} U_r^H = A^+$.

42. El rango de A es sencillamente el número de valores singulares no nulos, de donde $\text{rg}(A) = 2$. Por otra parte, sabemos que la matriz de proyección sobre el espacio columna de A es $AA^+ = U_r U_r^T$ (siendo $A = U_r D V_r^T$ una DVS reducida de A); también, que el espacio nulo de A es el complemento ortogonal de su espacio fila, y como el espacio fila de A es el espacio columna de A^T , es claro que la matriz de proyección sobre el espacio fila de A es $V_r V_r^T$; de modo que, finalmente, la matriz de proyección sobre el espacio nulo de A es $I_d - V_r V_r^T$. El resto del ejercicio es trivial o ya conocido (observar que nunca se necesita, ni conviene, calcular A para responder las

preguntas).

$$P_{COL(A)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{NUL(A)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, A^+ = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 12\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -12\sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

El máximo de $\|Ax\|$ es 2, en $\left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$; el mínimo de $\|Ax\|$ es 0 en $\left\{ \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} \right\}$

43. La descomposición está prácticamente lograda, sólo que las columnas de la primera matriz, siendo ortogonales, no son de norma 1, por lo que las dividimos por su norma (¿ y multiplicamos la correspondiente fila de la matriz siguiente, pues no podemos alterar A!) y así tenemos una DVS de A, $A = U \Sigma V^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \text{ de ahí es } A^T = V \Sigma^T U^T \text{ una DVS}$$

de A^T , mientras que la matriz de proyección sobre $col A^T$ debe ser la identidad (¿por qué?), mientras que la de proyección sobre $Nul(A^T) = [col A]^{\perp}$ es, naturalmente, $I_d - U_r U_r^T$, y finalmente, $A^+ = V \Sigma^+ U^T = V_r D^{-1} U_r$, resultando:

$$P_{NUL(A^T)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad A^+ = \begin{bmatrix} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{24}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{24} \end{bmatrix}$$

44. a). V pues si $B = P^T A P$ con P ortogonal y se considera una DVS de A, $A = U \Sigma V^T$, es $B = P^T U \Sigma V^T P = (P^T U) \Sigma (P^T V)^T$ una DVS de B ya que (probarlo) $P^T U$ y $P^T V$ son unitarias; b).

F pues $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la Identidad tienen los mismos autovalores pero diferentes valores

singulares; c). F, tómese $A = (-1)$; d). V, pues en tal caso $A^T A = A^2$, de modo que si λ es autovalor de A, λ^2 lo es de $A^T A$, y así $\sigma = |\lambda|$.

45. Si λ es autovalor de A, existe v unitario tal que $v^T A^T A v = \|Av\|^2 = \lambda^2 \|v\|^2 = \lambda^2$; por otra parte, sabemos que, sujeto a $x^T x = 1$, es $\lambda_{\min}(A^T A) \leq x^T A^T A x \leq \lambda_{\max}(A^T A)$ y de allí el resultado (detallar el "de ahí el resultado")