

ALGEBRA II. FIUBA  
Segundo cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del trabajo práctico N° 6  
(por Fernando Acero con la colaboración de Ada Cammilleri)

Obs.: siempre con  $K$  denotamos al conjunto de números reales  $R$  o al de los números complejos  $C$ .

1. 1)  $a = 0, b = \sqrt{2}/2, c = -\sqrt{2}/2$ ; 2)  $a=1, b=i$ .
2. Ej. 5: ii), iv), v), y también i), iii) si  $|k|=1$ ; Ej. 6: todas excepto i).
3. Ya realizado en TP2, Ej.28 donde se comprueba que  $H = H^T$  y  $H H = I$ , de modo que  $H H^T = H H^T = I$ .
4. a).  $U$  es unitaria sii  $U U^H = U^H U = I$ . Así resulta  $I = U^H U = U U^H = U^H [U^H]^H = [U^H]^H U^H = \overline{U U^H}^T = [U^T]^H U^T = U^T [U^T]^H$   
 b).  $[UV]^H [UV] = V^H U^H U V = V^H V = I = U U^H = UV V^H U^H = [UV] [UV]^H$ .  
 (justificar todas las igualdades)
5. a).  $(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}')) = (P\mathbf{x}, P\mathbf{x}') = [P\mathbf{x}]^T [P\mathbf{x}'] = \mathbf{x}^T P^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T I \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ; si en particular es  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  se tiene  $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ . (Se ha probado, entonces, que  $T$  preserva el p.i.canónico y la norma inducida).  
 b)  $0 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (T(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}'))$ , la segunda igualdad por a).  
 c)  $\delta_{ij} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = (T(\mathbf{v}_i), T(\mathbf{v}_j))$ , la segunda igualdad por a). (El símbolo  $\delta_{ij}$  vale 1 si  $i=j$ , y vale 0 si  $i \neq j$ )  
 d). Por definición,  $S$  es invariante por  $T$  sii  $T(S) \subset S$ ; pero como, en particular,  $T$  es inversible,  $\dim(T(S)) = \dim(S)$ , con lo cual vale  $(T(S))=S$ .  
 Para probar que  $T(S^\perp) = S^\perp$  alcanza probar que  $S^\perp$  es invariante por  $T$ , pues entonces se aplica la primera conclusión a  $S^\perp$ . Para cualesquiera  $\mathbf{z} \in S^\perp, \mathbf{x} \in S$  vale que  $(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = 0$ , y por a), entonces que  $(T(\mathbf{z}), T(\mathbf{x})) = 0$ . Como todo vector de  $S$  es de la forma  $T(\mathbf{x})$  para algún  $\mathbf{x}$  de  $S$ , esto permite comprobar que  $T(\mathbf{z})$  es ortogonal a todo vector de  $S$  y, por lo tanto,  $T(\mathbf{z})$  está en  $S^\perp$ .
6. Sólo es preciso cambiar  $^T$  por  $^H$ , ninguna modificación en el resto.
7. Para probar que  $C_{B_1 B_2}$  es unitaria basta ver que sus columnas son ortonormales. Para ésto, calcular  $(\text{col}_i(C_{B_1 B_2}), \text{col}_j(C_{B_1 B_2}))$  sabiendo que  $\text{col}_i(C_{B_1 B_2}) = [v_i]_{B_2} = ((u_1, v_i), (u_2, v_i), \dots, (u_n, v_i))^T$ . Justificar, detallar, completar!. También pruébese el resultado recíproco: *para cualquier  $P$  unitaria existen  $B_1, B_2$  tal que  $P$  es la matriz de pasaje entre ellas.*
8. a. Si  $P$  es la matriz de pasaje de  $B'$  a  $B$  es  $[T]_{B'} = P [T]_B P^{-1} = P [T]_B P^H$ , con la segunda igualdad por Ej. 7. y de allí el resultado por el Ej. 4.b).  
 b. Es inmediato. (explicar).
9. Puede proponerse (explicitar) una rotación según un eje ortogonal a  $S$  o una simetría respecto de  $S$  (¿pueden proponerse otras?)
10. Ambas son del tipo  $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$  con  $P$  ortogonal (¿por qué?), luego se aplica el Ej. 5.
11. Se trata de un cálculo de rutina, lo importante es observar que se verifica el Ej. 12.

12. Si  $\lambda \in K$  es autovalor de  $P$ ,  $\mathbf{x}$  su correspondiente autovector asociado, resulta que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tal que  $P\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ ; por ej. 5. a) es  $\|\mathbf{x}\| = \|P\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$  de donde (¿por qué?) es  $|\lambda| = 1$ . Si ahora también es  $\mathbf{y}$  es autovector de  $P$  asociado a  $\mu (\neq \lambda)$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  tal que  $P\mathbf{y} = \mu \mathbf{y}$ ; se tiene entonces que  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (P\mathbf{x}, P\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}, \mu\mathbf{y}) = \overline{\lambda} \mu (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mu/\lambda) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow [1 - (\mu/\lambda)] (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , de donde es  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  (Para la justificación: la primera igualdad por ej.5.a), la segunda por hipótesis, la tercera por axiomas (¿cuáles?) de p.i., la cuarta por ser 1 el módulo de  $\lambda$  (ampliar esta justificación), la conclusión por ser  $\mu \neq \lambda$ )  
Esto prueba que asociados a *dos* autovalores distintos los correspondientes autovectores de una matriz unitaria son ortogonales; ¿prueba también que asociados a  $n$  autovalores distintos dos a dos son ortogonales los correspondientes autovectores?.
13. Indicamos los autovalores ( y de allí la matriz diagonal) y los autoespacios asociados ( y de allí cómo construir la matriz  $P$  cuidando la normalización) en cada caso.
- i)  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, S_1 = \text{gen} \{(1 \ -1)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ 1)^T\}$ ;
- ii)  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -2, S_1 = \text{gen} \{(1 \ -2 \ 1)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ 1 \ 1)^T\}, S_3 = \text{gen} \{(1 \ 0 \ -1)^T\}$ ;
- iii)  $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -50, S_1 = \text{gen} \{(4 \ -3 \ 0)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(3 \ 4 \ 0)^T\}, S_3 = \text{gen} \{(0 \ 0 \ 1)^T\}$ ;
- iv)  $\lambda_1 = 1$  (doble),  $\lambda_2 = 3$  (doble),  $S_1 = \text{gen} \{(1 \ 0 \ -1 \ 0)^T, (0 \ 1 \ 0 \ -1)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T, (0 \ 1 \ 0 \ 1)^T\}$ .
14. i).  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, S_1 = \text{gen} \{(1 \ i)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(i \ 1)^T\}$ ;
- ii).  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, S_1 = \text{gen} \{(1 \ i \ 0)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(i \ 1 \ 0)^T\}, S_3 = \text{gen} \{(0 \ 0 \ 1)^T\}$ ;
15. i).  $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i, S_1 = \text{gen} \{(-1 \ i)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ i)^T\}$ ;
- ii).  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 1, S_1 = \text{gen} \{(-1 \ i \ 0)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(1 \ i \ 0)^T\}, S_3 = \text{gen} \{(0 \ 0 \ 1)^T\}$ ;
16. a).  $V$  (pues  $A = P D_A P^T = (P D_A P^T)^T = A^T$ );
- b).  $F$  ( $A = I_n$  es simétrica con único autovalor 1);
- c).  $V$ ;
- d).  $F$  (ver Ej. 15);
- e).  $V$  (pues  $A = P D_A P^H = (P D_A P^H)^H = A^H$ );
- f).  $V$  (pues  $A = P D_A P^H \Rightarrow A^k = P (D_A)^k P^H$ );
- g).  $V$  (pues  $A^{-1} = P (D_A)^{-1} P^H$ ).
17. Proponer dos matrices hermíticas que no conmuten. (¿qué sucede si conmutan?).
18.  $B^H B = B^H (B^H)^H = (B^H B)^H$ ;  $B B^H = (B^H)^H B^H = (B B^H)^H$ ;  $B^H A B = B^H A^H B = (B^H A B)^H$ .
19. a) Los autovalores de  $A$  son  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ , y los autoespacios  $S_1 = \text{gen} \{(1 \ i)^T\}, S_2 = \text{gen} \{(i \ 1)^T\}$ ;
- c)  $A^H = (i \ C)^H = -i \ C^H = -i (-C) = i \ C = A$
- d) Como  $A = P D_A P^H$  resulta  $C = -i \ A = -i \ P D_A P^H = P (-i \ D_A) P^H = P D_C P^H$ .
- e) Si  $n$  es impar, de  $C = -C^T$  resulta  $\det(C) = -\det(C)$ , de donde  $\det(C) = 0$ .

20. La simetría de  $A$  exige que sus autovalores sean  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$  (doble), y sus subespacios propios  $S_1 = \text{gen} \{ (1 \ 1 \ 1)^T \}$ ,  $S_2 = [S_1]^\perp$ ; y de allí resulta  $A$ .
21. Debe obtenerse el restante autovalor de  $A$  (que debe ser real, pues  $A$  es hermítica) y como se sabe que  $0$  es autovalor de  $B$ , algún autovalor  $\mu$  de  $A$  debe satisfacer (ver ej. 18, TP5)  $\mu^3 - \mu^2 + \mu - 1 = 0 = (\mu - 1)(\mu^2 + 1)$  lo que sólo es posible con  $\mu = 1$ ; de modo que los autovalores de  $A$  son  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 2$  (doble), restando elegir  $S_\mu$  y  $S_\lambda = [S_\mu]^\perp$ , los correspondientes autoespacios, manteniendo la restricción de que  $S$  resulte invariante por  $A$ . Una posibilidad es asignar  $S_\lambda = S = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (1 \ 0 \ -1)^T, \mathbf{v}_2 = (1 \ -2 \ i)^T \}$ ,  $S_\mu = [S_\lambda]^\perp = \text{gen} \{ \mathbf{v}_3 = (1 \ i \ 1)^T \}$  lo que origina una matriz  $A$ ; otra podría ser asignar  $S_\lambda = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \}$ ,  $S_\mu = [S_\lambda]^\perp = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 \}$  conduciendo a una matriz  $A'$ .

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & i & -1 \\ -i & 5 & -i \\ -1 & i & 5 \end{pmatrix}; \quad A' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & -2i & -1 \\ 2i & 8 & 2i \\ -1 & -2i & 11 \end{pmatrix}$$

22. En todos los casos es  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  simétrica con elementos  $a_{ij}$  dados por i).  $a_{11} = 10$ ,  $a_{12} = a_{21} = -3$ ,  $a_{22} = -3$ ; ii).  $a_{11} = 5$ ,  $a_{12} = a_{21} = 3/2$ ,  $a_{22} = 0$ ; iii).  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = a_{21} = 1/2$ ,  $a_{22} = 0$ .
23.  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  simétrica con elementos  $a_{ij}$  dados por i).  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = a_{21} = 2$ ,  $a_{22} = 0$ ,  $a_{33} = 0$ ,  $a_{13} = a_{31} = 3$ ,  $a_{23} = a_{32} = -4$ ; ii).  $a_{11} = 8$ ,  $a_{12} = a_{21} = -3$ ,  $a_{22} = 7$ ,  $a_{33} = -3$ ,  $a_{13} = a_{31} = 2$ ,  $a_{23} = a_{32} = -1$ ; iii).  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$ ,  $a_{22} = 0$ ,  $a_{33} = 1$ ,  $a_{13} = a_{31} = -1/2$ ,  $a_{23} = a_{32} = 0$ .
24. Llamamos  $A$  a la matriz (simétrica) de la forma cuadrática, y  $P$  a la que tiene por columnas una BON de  $\mathbb{R}^2$  formada con autovectores de  $A$ . Para obtener la diagonalización de la forma cuadrática hacemos:  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T A (\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T A \mathbf{P}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D_A \mathbf{y}$ , y siendo  $\lambda_1, \lambda_2$  los autovalores de  $A$ , la forma se expresa así:  $\mathbf{y}^T D_A \mathbf{y} = \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2$ . La curva de nivel  $k$  es el conjunto  $C_k = \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2 = k \}$ .

a).  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = -4$ ,  $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (1 \ 1)^T \}$ ,  $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (-1 \ 1)^T \}$ ;  $6(y_1)^2 - 4(y_2)^2$ ; en cuanto a las curvas de nivel, resultan ser hipérbolas, con centro en el origen, que cortan el eje  $y_1$  en los puntos  $(\pm \sqrt{k/6} \ 0)^T$  si  $k$  es positivo, o al eje  $y_2$   $(0 \ \pm \frac{1}{2} \sqrt{-k})^T$  si  $k$  es negativo. En el caso  $k=0$ , resultan ser un par de rectas.

b).  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 7$ ,  $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (2 \ 1)^T \}$ ,  $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (-1 \ 2)^T \}$ ;  $2(y_1)^2 + 7(y_2)^2$ ; en cuanto a las curvas de nivel, para  $k=0$ , es  $C_0 = (0 \ 0)^T$  y en el caso,  $k$  positivo, elipses centradas en  $C_0$  de ejes definidos por según  $S_1, S_2$  tales que las longitudes de los "radios" mayor (sobre  $S_1$ ) y menor (sobre  $S_2$ ) son de valor  $\sqrt{k/2}$  ( $\sqrt{k/7}$ ).

f).  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (1 \ -1)^T \}$ ,  $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (1 \ 1)^T \}$ ;  $2(y_2)^2$ ; en cuanto a las curvas de nivel,  $C_0 = S_1$ , y el par de rectas paralelas a  $C_0$  a distancia  $\sqrt{k/2}$  si  $k$  es positivo.

g). Ambos autovalores negativos, las curvas de nivel son elipses en el caso  $k$  negativo.

(en cada caso construir la matriz  $P$  de la transformación ortogonal  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  de tal modo que represente una rotación del sistema de referencia ( $\det P = 1$ ) e identificar su intensidad  $\alpha$ )

25. Llamando  $A$  a la matriz (simétrica) de la forma cuadrática,  $P$  a la matriz que tiene por columnas una BON de  $\mathbb{R}^3$  formada con autovectores de  $A$ , para diagonalizar la forma cuadrática hacemos:  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T A (\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T A \mathbf{P}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D_A \mathbf{y} = \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2 + \lambda_3 (y_3)^2$  siendo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  los autovalores de  $A$

a)  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = 9$ ,  $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (-2 \ 2 \ 1)^T \}$ ,  $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (2 \ 1 \ 2)^T \}$ ;  $S_3 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_3 = (1 \ 2 \ -2)^T \}$ ;  $3(y_1)^2 + 6(y_2)^2 + 9(y_3)^2$ .

b)  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 5$ ,  $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (0 \ 1 \ -1)^T \}$ ,  $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_2 = (2 \ -1 \ -1)^T \}$ ;  $S_3 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_3 = (1 \ 1 \ 1)^T \}$ ;  $2(y_2)^2 + 5(y_3)^2$ .

c)  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$  (doble),  $\lambda_2 = 1$ ,  $S_1 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_1 = (1 \ -1 \ 0)^T, \mathbf{v}_2 = (1 \ 0 \ -1)^T \}$ ,  $S_2 = \text{gen} \{ \mathbf{v}_3 = (1 \ 1 \ 1)^T \}$ ;  
 $\frac{1}{2} (y_1)^2 - \frac{1}{2} (y_2)^2 + (y_3)^2$ .

26. Conviene probar algo un poco más general que este ejemplo particular: *para toda forma cuadrática definida en  $K^n$  por  $f(x) = x^H A x$  (con  $A$  hermítica) es, para cualquier  $x$ ,  $\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq f(x) \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2$*  (Prueba: Siendo  $A$  hermítica sus autovalores son reales, de modo que podemos ordenarlos así:  $\lambda_{\min}(A) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}(A)$ , y siendo además  $A$  unitariamente diagonalizable existe  $P$  unitaria tal que  $P^H A P$  es diagonal; de modo que, con la transformación  $x=Py$ , la forma cuadrática es ahora  $x^H A x = (Py)^H A (Py) = y^H (P^H A P) y = y^H D_A y = \sum \lambda_i |y_i|^2$  y como ahora es claro que  $\lambda_{\min}(A) \|y\|^2 \leq \sum \lambda_i |y_i|^2 \leq \lambda_{\max}(A) \|y\|^2$  y además  $\|x\| = \|y\|$  (pues  $P$  es unitaria), resulta que  $\lambda_{\min}(A) \|x\|^2 \leq f(x) \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2$ , como se afirmó). Ahora el ejercicio es trivial, véase que los autovalores de  $A$  son  $-1$  y  $1$ .
27. Primero ver que si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  verifican que  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$  y  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , ésto es equivalente a  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$ . Luego considerar:  $A$  es definida positiva  $\Leftrightarrow \text{traza}(A) > 0$  y  $\det(A) > 0 \Leftrightarrow a_{11} + a_{22} > 0$  y  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . Ver que estas dos últimas desigualdades se cumplen simultáneamente si, y solo si,  $a_{11} > 0$  y  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ .
28. Es el ejercicio 9 del TP2.
29. Basta analizar si la matriz que lo define es definida positiva.; a). Sí, pues sus autovalores son  $\{2 \pm \sqrt{2}\}$ ; b). Sí; c). Sí, sus autovalores son 1, 7, 13. (graficar indicando ejes e intensidad de la rotación)
30. Observar que la matriz del p.i es hermítica y definida positiva.
31. Hacemos la prueba en  $K^{m \times n}$  reemplazando  $^T$  por  $^H$ ; en primer lugar es claro que  $G^H = (B^H B)^H = G$ ;  $\forall \mathbf{x} \in K^{m \times 1}$  se tiene que  $\mathbf{x}^H G \mathbf{x} = \mathbf{x}^H (B^H B) \mathbf{x} = (\mathbf{x}^H B^H) (B \mathbf{x}) = (B \mathbf{x})^H (B \mathbf{x}) = \|B \mathbf{x}\|^2 \geq 0$ , luego  $G$  es semidefinida positiva; por otra parte es  $\mathbf{x}^H G \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow B \mathbf{x} = \mathbf{0}$  de modo que si las columnas de  $B$  son l.i. se tendrá que necesariamente  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , resultando  $G$  definida positiva.  
*Observación: también es válido un resultado recíproco: Si una matriz  $G$  es definida positiva existe una matriz regular  $B$  tal que  $G = B^H B$ , pues dado que  $G = P D_G P^H$  con  $P$  unitaria y autovalores en  $D_G$  positivos (¿por qué?), notando  $\sqrt{D_G}$  a la matriz diagonal que sobre la diagonal tiene las raíces cuadradas de los elementos de la diagonal de  $D_G$ , se tiene el resultado haciendo  $B = \sqrt{D_G} P^H$  puesto que  $G = P D_G P^H = (\sqrt{D_G} P^H)^H (\sqrt{D_G} P^H)$  siendo  $B$  regular (¿por qué?)*
32. Una parte no es más que un trivial corolario de la prueba asentada en el ejercicio 26, cuando se reemplaza  $\|x\|$  por  $k$ ; en cuanto a la localización del máximo (mínimo), basta ver que se alcanza la cota superior (inferior) en cualquier autovector del autoespacio asociado al autovalor máx (mín), mientras su norma sea  $k$ . En efecto: si  $u$  es un tal autovector asociado al autovalor máximo,  $u^H A u = u^H \lambda_{\max} u = \lambda_{\max} \|u\|^2 = \lambda_{\max} k^2$ . Para una forma cuadrática  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A \mathbf{x}$  se tiene el resultado: *el mínimo (máximo) de  $f(\mathbf{x})$  sujeto a  $\|x\| = k$  es  $k^2 \lambda_{\min}(A)$  ( $k^2 \lambda_{\max}(A)$ ) y se alcanza en  $X_{\min} = \{ \mathbf{x} \in S_{\min} : \|x\| = k \}$  ( $X_{\max} = \{ \mathbf{x} \in S_{\max} : \|x\| = k \}$ ). Así resulta:*

$$25a. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 6 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = -4 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$25b. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 7 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = 2 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$25c. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 2 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = 0 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$26a. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 9 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = 3 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$26b. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 5 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = 0 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad 26c. [f(\mathbf{x})]_{\max} = 1 \text{ en}$$

$$\left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = -\frac{1}{2} \text{ en } \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge \|\mathbf{x}\|^2 = 1 \}.$$

**33.** Si aplicamos la sugerencia ( el cambio de variables existe pues B es definida positiva), haciendo

la sustitución  $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{u}$ , con  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , la restricción queda expresada  $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1$  y la forma es

ahora  $\mathbf{u}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}) \mathbf{u}$ , problema en todo idéntico al anterior, de modo que aplicamos sus resultados a la matriz  $\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}$  y de allí queda

$$[f(\mathbf{x})]_{\max} = -9 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, [f(\mathbf{x})]_{\min} = -27 \text{ en } \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

*Observación: un esbozo de la sugerencia en general :  $\exists \mathbf{S}$  ortogonal tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{S}^T \mathbf{D}_B \mathbf{S}$  con los autovalores de B positivos, luego puede escribirse  $\mathbf{B} = \mathbf{S}^T \sqrt{\mathbf{D}_B} \sqrt{\mathbf{D}_B} \mathbf{S}$ , y llamando  $\mathbf{H} =$*

*$\mathbf{S}^T (\sqrt{\mathbf{D}_B})^{-1}$  se ve de inmediato que  $\mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{u}$  transforma la restricción en  $\|\mathbf{u}\|^2 = k^2$  y la forma en  $\mathbf{u}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}) \mathbf{u}$ , problema que se reduce al del ejercicio anterior, puesto que (probarlo)  $\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H}$  es simétrica.*

**34.** Se aplica directamente lo dicho en el problema anterior y resulta  $[f(\mathbf{x})]_{\max} = 4 \text{ en } \left\{ \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\},$

$$[f(\mathbf{x})]_{\min} = 4/3 \text{ en } \left\{ \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{2/3} \end{pmatrix} \right\}. \text{ Observación: dada que la forma a extremar no}$$

*es sino el cuadrado de la distancia al origen, y la restricción es la ecuación de una elipse, el problema puede resolverse geométricamente.*

**35.** Se trata del mismo tipo de problema que venimos tratando en los dos anteriores; dado que se pide extremar la distancia, basta tener presente que el máximo (mínimo) se alcanza en los puntos de la elipse pertenecientes al autoespacio asociado al autovalor mínimo (máximo) y es

$$d_{\max} = 1 / \sqrt{\lambda_{\min}}, \quad d_{\min} = 1 / \sqrt{\lambda_{\max}} :$$

$$[d]_{\max} = 1 \text{ en } \left\{ \pm \begin{pmatrix} \sqrt{30}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \right\}, \quad [f(\mathbf{x})]_{\min} = 1/\sqrt{7} \text{ en } \left\{ \pm \begin{pmatrix} -\sqrt{42}/42 \\ \sqrt{210}/42 \end{pmatrix} \right\}.$$

36. Recordamos que dada  $A \in K^{n \times m}$  de rango  $r$  existe una DVS de  $A$ , esto es, una matriz unitaria  $V \in K^{m \times m}$ , una matriz  $\Sigma \in R^{n \times m}$  con elementos nulos excepto los primeros  $r$  de la “diagonal principal” que son estrictamente mayores que cero, y una matriz unitaria  $U \in K^{n \times n}$  tales que  $A = U \Sigma V^H$ . (es usual ordenar los elementos no nulos de la “diagonal” de  $\Sigma$  de mayor a menor)

a).  $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b).  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

c).  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

d).  $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{5}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$

e).  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

37. Se aplica el resultado del ejercicio 32 a la matriz  $A^H A$ , pues  $\|T(\mathbf{x})\|^2 = (A\mathbf{x})^H (A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H (A^H A) \mathbf{x}$ , luego el máximo (mínimo) valor de  $\|T(\mathbf{x})\|^2$  restringido a  $\|\mathbf{x}\| = 1$  es el máximo (mínimo) autovalor de  $A^H A$  (Y entonces, por definición de valores singulares, el máximo (mínimo) valor de  $\|T(\mathbf{x})\|$  restringido a  $\|\mathbf{x}\| = 1$  es el máximo (mínimo) valor singular de  $A$ ) y se alcanza en los vectores de norma 1 del correspondiente autoespacio. (si se tiene una DVS de  $A$  tales autovectores se observan en las columnas de  $V$ , ver ej. 36). Así resulta que el máximo (mínimo) es el valor  $\sqrt{12}$  ( $\sqrt{10}$ ) y se alcanza en  $\pm 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$  ( $\pm 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ ). (Resulta importante retener el resultado: El máximo de  $\|T(\mathbf{x})\|$  restringido a  $\|\mathbf{x}\| = 1$  es el máximo valor singular de  $A$ ; tal número es una norma de  $T$ , esto es, se define  $\|T\|_2 = \text{máximo valor singular de } A$ ).

38. Efectuamos la prueba en  $K^{n \times m}$ ; observamos que en la descomposición  $A = U \Sigma V^H$  es  $\Sigma^H \Sigma \in K^{m \times m}$  una matriz diagonal, y también lo es  $\Sigma \Sigma^H \in K^{n \times n}$ , y que en cualquier caso es  $\Sigma^H = \Sigma^T$ . Justificar cada igualdad en lo que sigue, detallar, explicar.

a).  $A^{-1} = [U \Sigma V^H]^{-1} = V \Sigma^{-1} U^H$ . (observar cómo queda ordenada la diagonal de  $\Sigma^{-1}$ )

b).  $|\det A| = |\det(U)| |\det(\Sigma)| |\det(V^H)| = \prod_{i=1}^n \sigma_i$ . Recordar que  $|\det(U)| = 1 = |\det(V^H)|$  pues son matrices unitarias.

c). Por una lado,  $A^H A V = V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H V = V \Sigma^H \Sigma V^H V = V \Sigma^H \Sigma$ , es decir  $A^H A \mathbf{v}_i = (\sigma_i)^2 \mathbf{v}_i$ , siendo  $\mathbf{v}_i$  la  $i$ -ésima columna de  $V$ . Por otro,  $A A^H U = U \Sigma V^H V \Sigma^H U^H = U \Sigma \Sigma^H U^H U = U \Sigma \Sigma^H$ , es decir que si  $\mathbf{u}_i$  es la  $i$ -ésima columna de  $U$  se tiene  $A^H A \mathbf{u}_i = (\sigma_i)^2 \mathbf{u}_i$ .

d).  $A = U \Sigma V^H$  es una DVS de  $A$  si  $A^H = V \Sigma^T U^H$  es una DVS de  $A^H$  y es claro que  $r(\Sigma) = r(\Sigma^T)$ . (En particular son iguales los máximos valores singulares, luego  $\|A\|_2 = \|A^H\|_2$ , según observación del ejercicio 37).

e). Si  $\mathbf{v}$  es autovector de  $A$  también lo es de  $A^H A = A^2$ , o sea,  $\mathbf{v}$  es no nulo y  $A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  y  $A^H A \mathbf{v} = A^2 \mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}$ . Luego (¿por qué?), luego  $\sigma = \sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$ .

f).  $G = A^H A = V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H = V \Sigma^H \Sigma V^H$  es una DVS de  $G$ , siendo entonces  $r(G) = r(\Sigma^H \Sigma) = r(\Sigma) = r(A)$ , y de allí  $G$  es invertible  $\Leftrightarrow r(G) = r(A) = m$ .

g)  $A = U \Sigma V^H$  entonces  $PA = PU \Sigma V^H = (PU) \Sigma V^H = U' \Sigma V^H$ , con  $U' = PU$  matriz unitaria (¿por qué?). Para el otro punto,  $A = U \Sigma V^H$  entonces  $AP = U \Sigma V^H P = U \Sigma (V^H P) = U \Sigma V'^H$ , con  $V' = VP^H$  matriz unitaria (¿por qué?).

$$39. \quad c). \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$e). \quad A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

40. Siendo  $A = U \Sigma V^H$  una DVS de  $A$  o  $A = U_r D V_r^H$  una DVS reducida de  $A$ , basta hacer  $A^+ = V \Sigma^+ U^H = V_r D^{-1} U_r^H$  y con ello la solución de norma mínima por mínimos cuadrados de  $Ax = b$  es  $\hat{x} = A^+ b$ . Resulta  $A^+ = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$ ;  $\hat{x} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . (observar que la solución pertenece a  $\text{fil}(A)$ ).

41. Se quiere ver que  $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$  coincide con  $A^+ = V \Sigma^+ U^H = V_r D^{-1} U_r^H$ , cuando  $A = U \Sigma V^H$  con  $\Sigma$  de rango  $m$  es una DVS de  $A$  o bien  $A = U_r D V_r^H$  es una DVS reducida de  $A$ . Aquí vale que  $V_r = V$  ( $r = m = \text{rango de } A$ ) Luego,  $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H = (VDU_r^H U_r D V^H)^{-1} VDU_r^H = VD^{-1} V^H VDU_r^H = VD^{-1} U_r^H = A^+$ .

42. El rango de  $A$  es sencillamente el número de valores singulares no nulos, de donde  $\text{rg}(A) = 2$ . Por otra parte, sabemos que la matriz de proyección sobre el espacio columna de  $A$  es  $AA^+ = U_r U_r^T$  (siendo  $A = U_r D V_r^T$  una DVS reducida de  $A$ ); también, que el espacio nulo de  $A$  es el complemento ortogonal de su espacio fila, y como el espacio fila de  $A$  es el espacio columna de  $A^T$ , es claro que la matriz de proyección sobre el espacio fila de  $A$  es  $V_r V_r^T$ ; de modo que, finalmente, la matriz de proyección sobre el espacio nulo de  $A$  es  $I_d - V_r V_r^T$ . El resto del ejercicio es trivial o ya conocido (observar que nunca se necesita, ni conviene, calcular  $A$  para responder las

preguntas).

$$P_{COL(A)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{NUL(A)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, A^+ = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 12\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -12\sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\text{El máximo de } \|Ax\| \text{ es 2, en } \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}; \text{ el mínimo de } \|Ax\| \text{ es 0 en } \left\{ \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} \right\}$$

43. La descomposición está prácticamente lograda, sólo que las columnas de la primera matriz, siendo ortogonales, no son de norma 1, por lo que las dividimos por su norma (¡ y multiplicamos la correspondiente fila de la matriz siguiente, pues no podemos alterar A!) y así tenemos una DVS de A,  $A = U \Sigma V^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \text{ de ahí es } A^T = V \Sigma^T U^T \text{ una DVS}$$

de  $A^T$ , mientras que la matriz de proyección sobre  $\text{col } A^T$  debe ser la identidad (¿por qué?), mientras que la de proyección sobre  $\text{Nul}(A^T) = [\text{col } A]^{\perp}$  es, naturalmente,  $I_d - U_r U_r^T$ , y finalmente,  $A^+ = V \Sigma^+ U^T = V_r D^{-1} U_r$ , resultando:

$$P_{NUL(A^T)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad A^+ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{24} \\ \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{24}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

44. a). V pues si  $B = P^T A P$  con  $P$  ortogonal y se considera una DVS de A,  $A = U \Sigma V^T$ , es  $B = P^T U \Sigma V^T P = (P^T U) \Sigma (P^T V)^T$  una DVS de B ya que (probarlo)  $P^T U$  y  $P^T V$  son unitarias; b).

F pues  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y la Identidad tienen los mismos autovalores pero diferentes valores

singulares; c). F, tómese  $A = (-1)$ ; d). V, pues en tal caso  $A^T A = A^2$ , de modo que si  $\lambda$  es autovalor de A,  $\lambda^2$  lo es de  $A^T A$ , y así  $\sigma = |\lambda|$ .

45. Si  $\lambda$  es autovalor de A, existe  $v$  unitario tal que  $v^T A^T A v = \|Av\|^2 = \lambda^2 \|v\|^2 = \lambda^2$ ; por otra parte, sabemos que, sujeto a  $x^T x = 1$ , es  $\lambda_{\min}(A^T A) \leq x^T A^T A x \leq \lambda_{\max}(A^T A)$  y de allí el resultado (detallar el “de ahí el resultado”)