ALGEBRA II. FIUBA
Segundo cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del trabajo práctico Nº 1
(por Fernando Acero con la colaboración de Ada Cammilleri)

1. Basta verificar la axiomática de espacio vectorial; así por ejemplo, para el elemento neutro de la suma, notado aquí **e**, se tiene $\mathbf{x} + \mathbf{e} = (x_1+ e_1, x_2+ e_2, ..., x_n+ e_n) = (e_1+ x_1, e_2+ x_2, ..., e_n+ x_n) = \mathbf{e} + \mathbf{x} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de donde $x_i+ e_i = x_i$, siendo entonces $e_i = 0$ para todo i, luego es $\mathbf{e} = \mathbf{0_V} = (0, 0, ..., 0)$; la primera igualdad se da por la definición de suma en V, la segunda por la conmutatividad de la suma en el cuerpo, la tercera como la primera. Así queda verificado que $\mathbf{e} = \mathbf{0_V}$ satisface : $\exists \mathbf{e} \in \mathbf{V}$ tal que $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{V} : \mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{e} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$. La verificación anterior es la misma ya se trate de R^n o C^n .

2. Sí.

3. Basta verificar la axiomática de espacio vectorial; en particular la matriz nula es el elemento neutro para la suma y el opuesto de una matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $-A = (-a_{ij})$.

4. Idem; en particular el polinomio nulo es el neutro, mientras que el opuesto de un polinomio es el que resulta de cambiar el signo a sus coeficientes.

5. Idem anterior (aceptando conocido que es continua la suma de funciones que son continuas en un dominio común y el producto de una función continua por un escalar)

6. Es claro que una condición *necesaria* es $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^p}$ pues es preciso que el neutro $\mathbf{0}_{\mathbf{R}^q}$ pertenezca a S; lo que en realidad debemos analizar es si también es una condición *suficiente*, esto es si $S = \{ \mathbf{x} \in R^q : A\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$ es un subespacio de R^q. Ya sabemos que el neutro pertenece a S, ahora $\forall\ \alpha \in R$, $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ se verifica que $A(\alpha\,\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\,A\,\mathbf{x} + A\,\mathbf{y} = \alpha\,\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, o en otros términos, $\alpha\,\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$ y por lo tanto efectivamente es S un subespacio de R^q. (Aclaramos que la condición $\alpha\,\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$, $\forall\ \alpha \in R$, $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ es equivalente a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$, $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, y $\alpha\,\mathbf{x} \in S$, $\forall\ \alpha \in R$, $\forall\ \mathbf{x} \in S$)

(El subespacio S aquí definido recibe el nombre de *subespacio nulo* de la matriz A y suele designarse como *Nul* (A), su dimensión se llama *nulidad*. Suponemos conocido de cursos previos el siguiente resultado: *la suma del rango y la nulidad de una matriz es igual al número de columnas*.)

7. a, b son subespacios, c no lo es (el neutro de R^4 no pertenece a S).

8. Como $\mathbf{P_n} \subset \mathbf{P}$ y contiene al polinomio nulo, bastará ver que $\alpha\,\mathbf{p} + \mathbf{q}$ pertenece a $\mathbf{P_n}$ si **p** y **q** pertenecen a $\mathbf{P_n}$ con cualquier escalar α. Pero esto último es cierto dado que la suma de dos polinomios es un polinomio cuyo grado no supera el máximo de los grados de los polinomios sumandos o bien es el polinomio nulo, y lo mismo ocurre con el producto de un polinomio por una constante.

9. a. No, pues si $(0, 0, 0) \in S$ debería ser $r = -1 = 0$ (Absurdo); luego $(0, 0, 0) \notin S$.

b. No, pues $(1, 2) \in S$ y $(-1, -2) \notin S$.

c. No, pues las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pertenecen a S, mientras que A + B no.

d. Sí.

e. Sí.

f. No, pues h(x) $\equiv 1$ pertenece a S, mientras que **h + h** no

10. Es claro que si uno de los subespacios está contenido en el otro, la unión es un subespacio (precisamente, el subespacio continente), o dicho de otro modo la inclusión es *una condición suficiente* para que la unión de subespacios también resulte un subespacio. Nada de esto pregunta el ejercicio, sino que pide una *condición necesaria*; pues bien, se afirma que la condición de inclusión también es necesaria, esto es que se debe probar que, siendo S_1 y S_2 subespacios de V tal que $S_1 \cup S_2$ es un subespacio de V $\Rightarrow$ ($S_1 \subset S_2$) $\vee$ ($S_2 \subset S_1$).
Si es $S_1 \subset S_2$, ya está probado; luego supongamos que $S_1 \not\subset S_2$, y queremos ver que entonces se verifica $S_2 \subset S_1$. Para esto, sea **v** un vector arbitrario de S_2 y tomemos un vector **u** que pertenezca a S_1 pero no a S_2 (el que existe pues $S_1 \not\subset S_2$). Como por hipótesis $S_1 \cup S_2$ es subespacio de V, resulta que **u + v** $\in S_1 \cup S_2$, es decir pertenece a alguno de ellos(en este caso, no a ambos). Pero no puede pertenecer a S_2 pues si **u + v = z** $\in S_2$, resultaría que **u = z - v** $\in S_2$ (pues **z** y **v** pertenecen al subespacio S_2) contra lo supuesto para **u**; luego debe pertenecer a S_1, es decir **u + v = z** $\in S_1$ y entonces **v = z - u** $\in S_1$ (pues **z** y **u** pertenecen al subespacio S_2) de donde resulta $S_2 \subset S_1$, lo que concluye la prueba.

11. Sí, pues {v_1, v_2 , v_4 } es un conjunto l.i. (verificarlo).
(Aquí utilizamos dos resultados 1) *Si un conjunto genera un subespacio y se extrae de tal conjunto un vector que es c.l .de los restantes, el conjunto resultante genera el mismo subespacio*. 2) *un conjunto l.i. de n vectores de un espacio vectorial n-dimensional es base del mismo*.)

12. No existe k $\in$ R que satisfaga lo pedido.

(Resolver el mismo ejercicio considerando los vectores en C^3 y el parámetro en C. (Rta.: *k = i, k = - i) .)*

13. a. Es li en C^2 como R-espacio, ld como C-espacio (ver que (i, -1) = i (1, i)).
b. y d. li., c. y e. ld.

14. 1: *n*; 2: *2 n*; 3: *p q*; 4 y 5: *no finita*; 6: *q – rango (A)*; 7 a: *1*; 7 b : *n - r*; 8 : *n + 1*; 9d: *3*; 9e : *no finita*. Justificamos alguna de las afirmaciones, por ejemplo la del 9d, esto es que si S = { **p** $\in$ $\mathbf{P}_3$: **p**(1) = p(2) } entonces dim (S) = 3, para lo que debemos exhibir un conjunto de tres polinomios en S que, siendo l.i., lo genere. Proponemos el conjunto B ={ 1, (t-1) (t-2), $(t-1)^2$ (t-2)}; probar ahora que B que es una base de S.

15. En particular, lo que debe probarse implica que C^2 como C espacio vectorial tiene dimensión 2 (lo que es fácil ver probando que B_C = { (1, 0), (0, 1)} es una base) mientras que C^2 como R espacio vectorial tiene dimensión 4 (lo que es fácil ver probando que B_R = { (1, 0), (0, 1), (*i*, 0), (0, *i*)} es una base). Sugerimos probar esta afirmación y generalizar *luego*.

16. a. B = { (0, 0, 1, 0), (3, 1, 0, -5)}; b. B = {1, t (t-1), t^2 (t-1)}.
c. B = {1-2t, 1-3t^2, 1-4t^3, 1-5t^4}; d. Es un conjunto de 6 matrices

17. las tres primeras matrices, por ejemplo, ya que son l.i.

18. i) {(1,-1,5),(-4,2,-6)}es base de col(A);{(2,5,2,0),(-5 –3,0,1)} es base de Nul(A);{(1,-4,9,-7),(-1,2,-4,1)} es base de fil(A);{(2,7,1)} es base de Nul(A^t);
ii) las tres columnas de A forman base de col(A); Nul(A)={(0,0,0)}; cualquier base de R^3 es base de fil(A); {(-20,-17,-5,1)} es base de Nul(A^t);
iii) ambas filas forman base de fil(A); {(1,-3,0,2),(2,2,1,0)} es base de Nul(A); la base canónica de R^2 es base de col(A); Nul(A^t)={(0,0)}

19. a)observar la expresión de Ax y la definición de col(A);
b)recordar que cuando se escribe un vector como c. l. de un conjunto l.i., los coeficientes de tal combinación son únicos;
c) usar b) dado que rango (A)=dim(col(A));
d) considerar c) en al caso b=0;
e)teniendo en cuenta a), Ax=b tiene solución para todo b es equivalente a que col(A)=K^n;
f) considerar a), tener en cuenta que siempre rg(A) $\leq$ rg($\tilde{A}$) y el hecho que si b $\notin$ col(A) entonces rg(A)<rg($\tilde{A}$)

20. Según la observación col(BA)=gen$\{Bu_1,\ldots Bu_m\}$. Como además, $Bu_i \in$ col(B) (por definición de espacio columna), resulta que las combinaciones lineales de $\{Bu_1,\ldots Bu_m\}$ también pertenecen a col(B) (ya que es un subespacio) con lo cual gen$\{Bu_1,\ldots Bu_m\} \subseteq$ col(B)

21. Para resolver el ejercicio se puede considerar que siendo B_1 un conjunto generador de S_1 y B_2 un conjunto generador de S_2, entonces resulta $B_1 \cup B_2$ es un conjunto generador de S_1+S_2, y de allí extraer una base. Para calcular la intersección entre los subespacios, plantear que buscamos vectores v tales que v= a $(1\ 1\ 2\ 0)^t$ + b $(2\ 0\ 3\ -1)^t$ (pues tienen que estar en S_1) que verifican la condición $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ (pues también son elementos de S_2) resultando $a = -b$ con lo cual v= b (1, -1, 1, -1).
Otra forma consiste en usar la relación $dim (S_1 +S_2) = dim(S_1) + dim(S_2) - dim(S_1 Ç S_2)$. Como es inmediato ver que dim (S_1) = 2 y dim (S_2) = 3, se puede observar que no puede suceder que dim ($S_1 \cap S_2$) sea 0 (pues sucedería que dentro de R^4 existe un subespacio de dim 5) y tampoco puede suceder que dim ($S_1 \cap S_2$) sea mayor o igual que 2 (pues $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$ y $S_1 \not\subset S_2$) con lo cual necesariamente dim ($S_1 \cap S_2$) = 1. Luego $S_1 + S_2 = R^4$; con tales conclusiones una base de la suma puede ser la canónica de R^4, mientras que de la intersección puede ser el conjunto {(1, -1, 1, -1)}.

22. La relación es $dim (S_1 +S_2) = dim(S_1) + dim(S_2) - dim(S_1 Ç S_2)$. Su justificación es la prueba completa de ese teorema (su demostración se encuentra en varios de los textos sugeridos en la bibliografía). Observamos que debe ser, desde luego, $dim (V) \geq dim (S_1 +S_2) = dim(S_1) + dim(S_2) - dim(S_1 Ç S_2) \geq 0$.

23. Lo probamos en R^{nxn} directamente (con prueba válida también en C^{nxn}), pues cualquiera sea la matriz A $\in R^{nxn}$ que se considere se verifica que A = ½ (A + A^T) + ½ (A – A^T) y llamando A_1 = ½ (A + A^T) se ve de inmediato que $A_1^T = A_1$, mientras que con A_2 = ½ (A – A^T) se observa que $A_2^T = -A_2$, es decir que $A_1 \in S_1$ mientras que $A_2 \in S_2$, lo que prueba que $R^{nxn} = S_1 + S_2$; ahora bien si una matriz A pertenece a la intersección debe cumplir A = A^T = – A (con la primera igualdad por pertenecer a S_1 mientras que la segunda por pertenecer a S_2) y de allí es la matriz nula, de modo que $S_1 \cap S_2 = \mathbf{0}_V$ y por lo tanto se hallan en suma directa (pues la intesección es el subespacio nulo), que con lo anterior permite escribir $R^{nxn} = S_1 \oplus S_2$

(Como un corolario, *demostrar* que dim (S_1) = ½ n (n+1), dim (S_2) = ½ n (n-1) , ejemplificar.)

24. i)la suma es directa y una base es la unión de las bases de los subespacios ; ii) la suma no es directa y una base es{(1,1,2,0,1),(2,0,3,0,-1),(-1,0,-2,1,1)}

25. Es obvio que B=$\{v_1,v_2,\ldots v_7\}$ genera $S_1+S_2+S_3$.(en el caso de tener una suma entre dos subespacios observamos que la unión de conjuntos generadores de tales subespacios es un conjunto generador de la suma entre ellos; esta observación se puede extender al caso de tener una suma entre una cantidad finita de subespacios)
Probemos primero que si B es base entonces la suma es directa
Para esto, de acuerdo con la definición de suma directa, consideremos x$\in S_1+S_2+S_3$ tal que $x=s_1+s_2+s_3=s'_1+s'_2+s'_3$ y veamos que $s_1=s'_1$, $s_2=s'_2$, $s_3=s'_3$.
Resulta entonces que $0_V=s_1-s'_1+s_2-s'_2+s_3-s'_3$.
Como $s_1-s'_1$ es una c.l. de $\{v_1,v_2\}$, $s_2-s'_2$ es una c.l. de $\{v_3,v_4,v_5\}$, y $s_3-s'_3$ es una c.l. de $\{v_6,v_7\}$ podemos expresar al vector nulo como c.l. de B, pero como B es l.i., necesariamente los

coeficientes de tal combinación son nulos, resultando s_i-s'_i=0_V para cada i=1,2,3 ,con los cual s_i=s'_i para cada i=1,2,3.
Probemos ahora que si la suma es directa entonces B es l.i.
De acuerdo con la definición de independencia lineal planteamos una combinación lineal con los elementos de B igualada al vector nulo: $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+a_5v_5+a_6v_6+a_7v_7=0_V$. (*)
Agrupando así $(a_1v_1+a_2v_2)+(a_3v_3+a_4v_4+a_5v_5)+(a_6v_6+a_7v_7)=0_V$ podemos considerar $0_V=s_1+s_2+s_3$ ($s_i\in S_i$); por la unicidad de la escritura, como trivialmente, $0_V=0_V+0_V+0_V$ resulta $s_i=0_V$ para i=1,2,3.
Como $\{v_1,v_2\}$,$\{v_3,v_4,v_5\}$y$\{v_6,v_7\}$ son conjuntos l.i. resulta que todos los escalares en (*) son nulos.

26. a. $c_B(\mathbf{v}) = (\,0\ 1\ 2\,)^T$; b. $c_B(\mathbf{v}) = (\,c\ \ b\text{-}c\ \ a\text{-}b\,)^T$.

27. a).1) Si $\mathbf{v}=\sum_{1}^{\mathbf{n}} a_i\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}'=\sum_{1}^{\mathbf{n}} b_i\,\mathbf{v}_i$ es $\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}'$ $=a\sum_{1}^{\mathbf{n}} a_i\mathbf{v}_i + b\sum_{1}^{\mathbf{n}} b_i\,\mathbf{v}_i$ =

$\sum_{1}^{\mathbf{n}}(aa_i+bb_i)\mathbf{v}_i$ y de aquí es $c_B(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}') = \alpha\, c_B(\mathbf{v}) + \beta c_B(\mathbf{v}')$ por la definición misma de c_B.

2). Es claro que cualquiera sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en $\mathbf{K^n}$ ciertamente existe un vector **v** en **V** tal que $c_B(\mathbf{v}) = \mathbf{x}$, es el vector $\mathbf{v}=\sum_{1}^{\mathbf{n}} x_i\mathbf{v}_i$, lo que prueba la sobreyectividad; en cuanto a la inyectividad, supongamos que existen dos vectores $\mathbf{v}=\sum_{1}^{\mathbf{n}} x_i\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}'=\sum_{1}^{\mathbf{n}} y_i\,\mathbf{v}_i$ tales que $c_B(\mathbf{v}) = c_B(\mathbf{v}')$, pero entonces es $x_i = y_i$ para todo *i* entre 1 y *n*, pero esto es afirmar que **v = v'**, lo que prueba la inyectividad.

(1) y 2) dicen que **V** y $\mathbf{K^n}$ son *isomorfos* y que la función de coordenadas es un isomorfismo.)

3) Probemos (lo que es equivalente) que $\{\mathbf{u}_i\}$ es ld en **V** sii lo es $\{c_B(\mathbf{u}_i)\}$ en $\mathbf{K^n}$ para lo que vemos en primer lugar que $\{\mathbf{u}_i\}$ es ld en **V** sii ∃j tal que $\mathbf{u}_j=\sum_{i\neq j} a_i\mathbf{u}_i$ y entonces, utilizando lo probado en i para justificar la segunda igualdad: $c_B(\mathbf{u}_j)=c_B\left(\sum_{i\neq j} a_i\mathbf{u}_i\right)=\sum_{i\neq j} a_i c_B(\mathbf{u}_i)$ de donde $\{c_B(\mathbf{u}_i)\}$ es ld en $\mathbf{K^n}$; si

$\{c_B(\mathbf{u}_i)\}$ ld en $\mathbf{K^n}$ ∃j tal que $c_B(\mathbf{u}_j)=\sum_{i\neq j} a_i c_B(\mathbf{u}_i)$, luego

$c_B^{-1}(c_B(\mathbf{u}_j))=c_B^{-1}(\sum_{i\neq j} a_i c_B(\mathbf{u}_i))$ lo que por definición de inversa, 1), 2) , queda

$\mathbf{u}_j=\sum_{i\neq j} a_i\mathbf{u}_i$, es decir $\{\mathbf{u}_i\}$ es ld en **V**.

(Aquí se prueba es que la dependencia lineal es preservada por la función de coordenadas, o en otro lenguaje, puede estudiarse la dependencia lineal de un conjunto reemplazándolo por el de sus coordenadas en una base *cualquiera*.)

b). Para cualquier $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en $\mathbf{K^n}$ es $\mathbf{v}=c_B^{-1}(\mathbf{x})=\sum_{1}^{\mathbf{n}} x_i\mathbf{v}_i$.

28. Por ejemplo, para analizar la independencia lineal de las matrices del ej.17 se analiza la independencia lineal del conjunto de vectores de R^4 $\{(1,-1,-1,2)^t,(-1,2,3,1)^t,(2,-3,-3,2)^t,(1,1,1,6)^t\}$ que representan las coordenadas de cada una de las matrices en base canónica.

29. La que tiene por columna j-ésima el j-ésimo vector de B.

30. $C_{BB''} = C_{B'B''}\ C_{BB'}$.

31. a. $C_{BB'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -7/2 \\ 1 & 1/3 & 2 \\ 2 & 2/3 & 9/2 \end{pmatrix}$; b. $C_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.