

Álgebra de compresión



$$A = U S V^T$$



$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$$

$$A = \sum \sigma_i u_i v_i^T$$

imagen color

Una matriz de $n \times m \times 3$ números

- A cada pixel se le asigna un vector de \mathbb{R}^3
- El vector indica la composición RGB (red-green-blue).
- Por ejemplo, un pixel marcado con el vector $(1, 0, 0)$ se verá así:

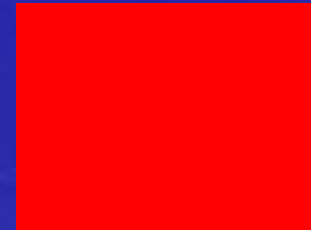


imagen blanco y negro

Es una matriz de $n \times m$ números

- A cada pixel se le asigna un número
- El número sólo puede ser 0 o 1
- Por ejemplo, un pixel marcado con el número 1 se verá así:



imagen blanco y negro

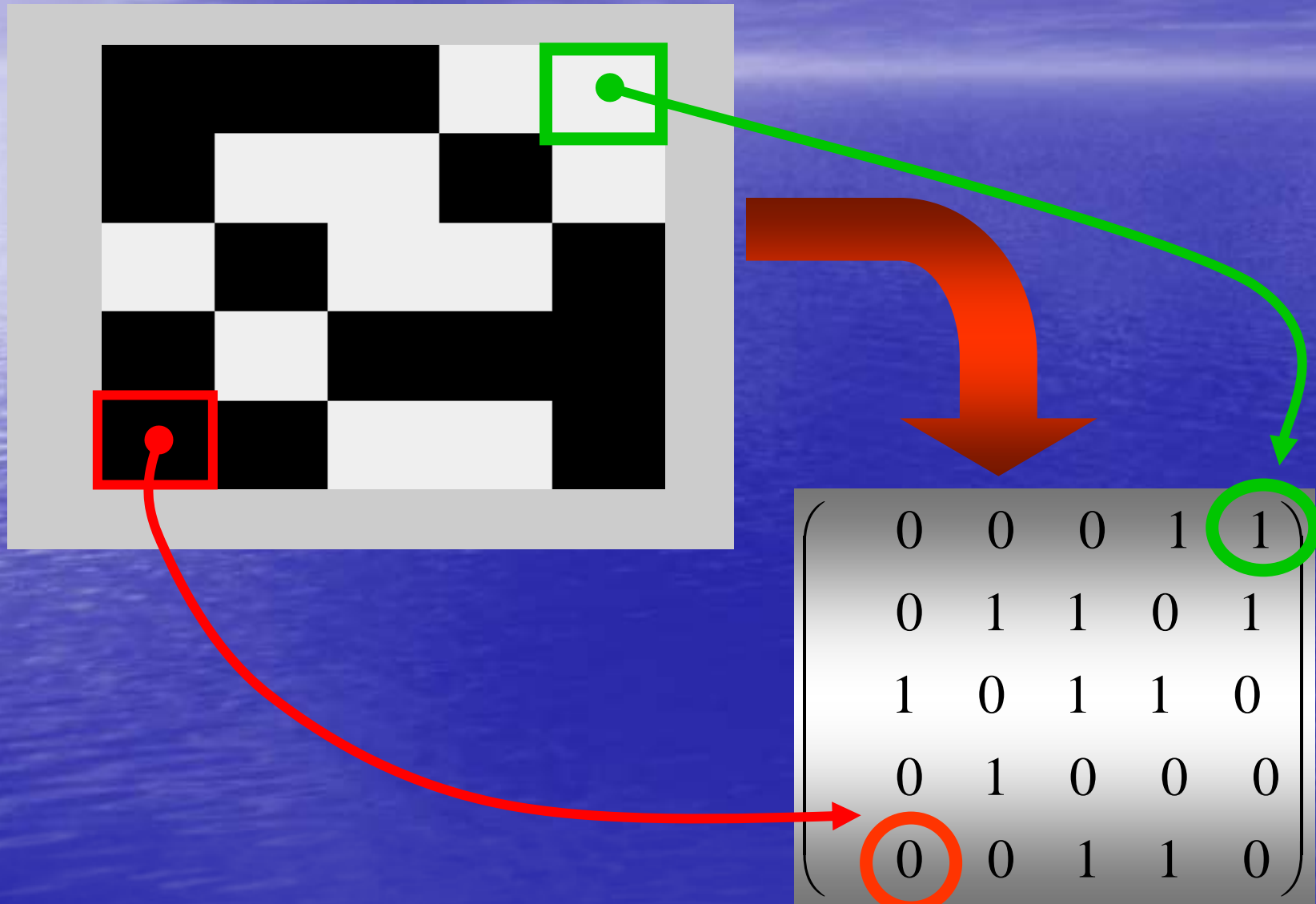


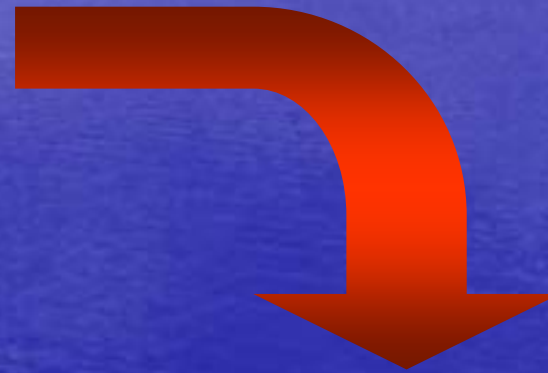
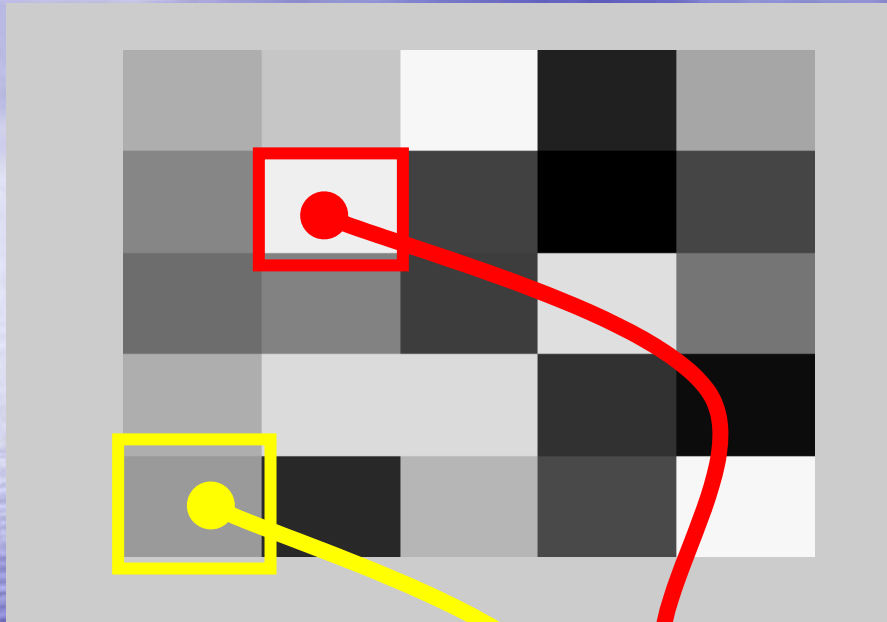
imagen en tonos de gris

Es una matriz de $n \times m$ números

- A cada pixel se le asigna un número
- El número es un natural entre 0 y 63
- Por ejemplo, un pixel marcado con el número 30 se verá así:



imagen en tonos de gris



44	50	62	9	42
34	60	17	1	18
28	33	16	56	30
44	55	55	13	4
39	11	46	19	62

Un poco de álgebra lineal

Descomponer una matriz es escribirla como el producto de otras.

Algunas descomposiciones famosas son la LU, LDU, la QR, la diagonalización

$$A = LU$$

$$A = LDU$$

$$A = QR$$

$$A = P D P^{-1}$$

lu, ldu, qr, pdp^{-1}

LU y LDU se aplican intensivamente en la resolución de sistemas lineales.

QR toda vez sea necesario mantener controlado el número de condición.

PDP^{-1} y su descomposición espectral para desacoplar problemas (p.ej. EDOs)

limitación de pdp^T

$A = PDP^{-1}$ puede reescribirse PDP^T
sii A es simétrica

... y en tal caso los autovalores de D
son reales (positivos, nulos o
negativos)

¿puede hacerse algo similar con una
matriz A rectangular cualquiera?

la descomposición svd

La respuesta es sí, la descomposición svd, es válida para TODA matriz A !!

$$A = U S V^T$$

Siendo U , V ortogonales y S con elementos no negativos en la diagonal, nulos fuera de ella.

la matriz S de $n \times r$

$$\sigma_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0$$

$$0 \quad \sigma_2 \quad 0 \quad \dots \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad \sigma_3 \quad \dots$$

r es el rango de A

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

la descomposición $U S V^T$

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_r\} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

la suma $U S V^T$

$$A = \sigma_1 \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \end{bmatrix} + \dots$$

A_1

$$+ \dots + \sigma_r \begin{bmatrix} u_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r^T \end{bmatrix}$$

A_r

The diagram illustrates the SVD decomposition of matrix A. The equation is written in red on a dark blue background. The first term, $\sigma_1 \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \end{bmatrix}$, is enclosed in a yellow oval with an arrow pointing to the label A_1 . The last term, $\sigma_r \begin{bmatrix} u_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r^T \end{bmatrix}$, is also enclosed in a yellow oval with an arrow pointing to the label A_r . Ellipses (\dots) are used to indicate the intermediate terms in the sum.

$$A = U S V^T$$

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T \\ + \dots + \sigma_r u_r v_r^T$$

... y como $A_i = \sigma_i u_i v_i^T$ es ...

$$A = A_1 + A_2 + \dots A_r$$

un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

The matrix $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ is circled in red. Red arrows point from the circled elements to labels σ_1 and σ_2 above the matrix.

$$\underbrace{\quad}_{A} = \underbrace{\quad}_{U} \cdot \underbrace{\quad}_{S} \cdot \underbrace{\quad}_{V^T}$$

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$



A



σ_1



u_1



v_1^T



σ_2



u_2




v_2^T

$$A = A_1 + A_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$


 A


 A_1


 A_2

$$\text{rg}(A) = 2 ; \text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_2) = 1$$

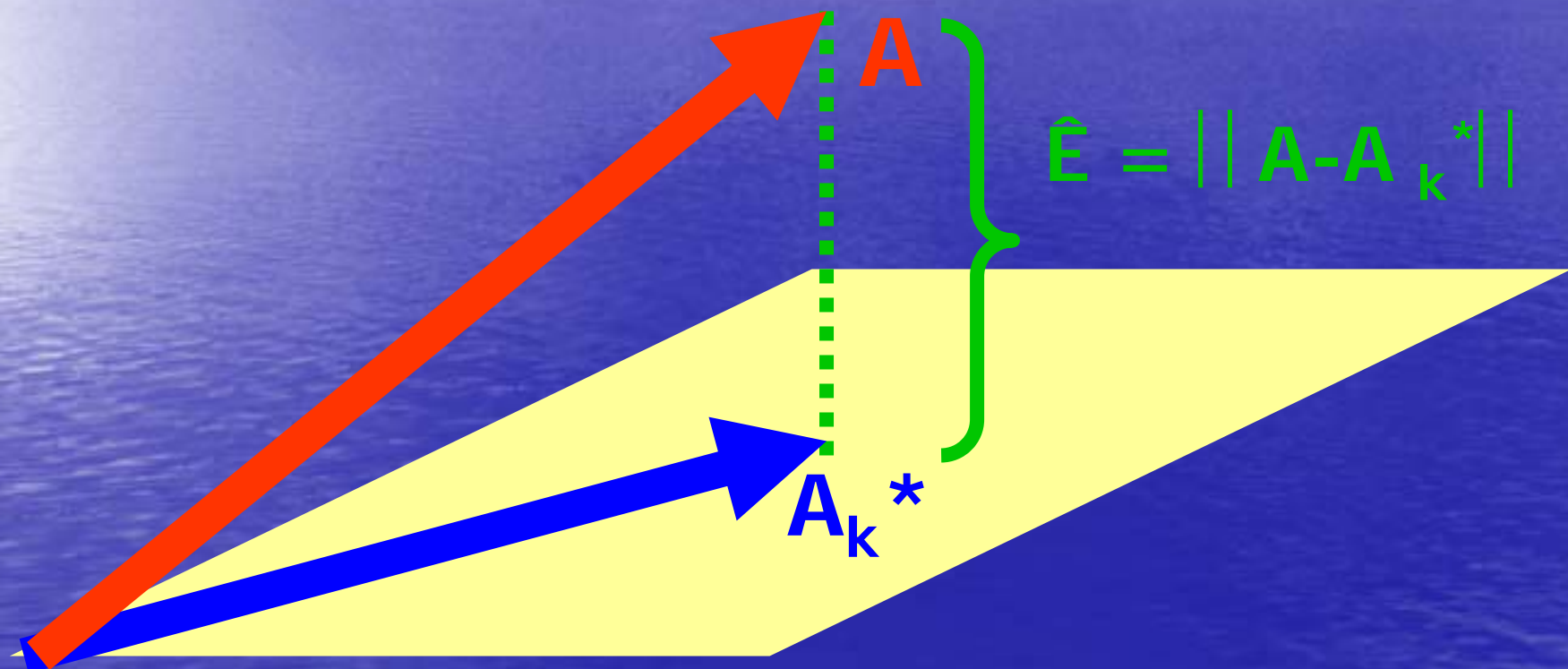
la aproximación A_k^*

$$A_k^* = A_1 + A_2 + \dots + A_k$$

y el error al aproximar A por A_k^* está dado por $\hat{e} = \|A - A_k^*\|$, y es el mínimo de todos los que se obtienen aproximando A por una matriz de rango k

la mejor aproximación

luego, en el sentido de los mínimos cuadrados A_k^* es la mejor aproximación para un dado k



$$S_k = \text{gen} \{ A_1, A_2, \dots, A_k \}$$

el ejemplo

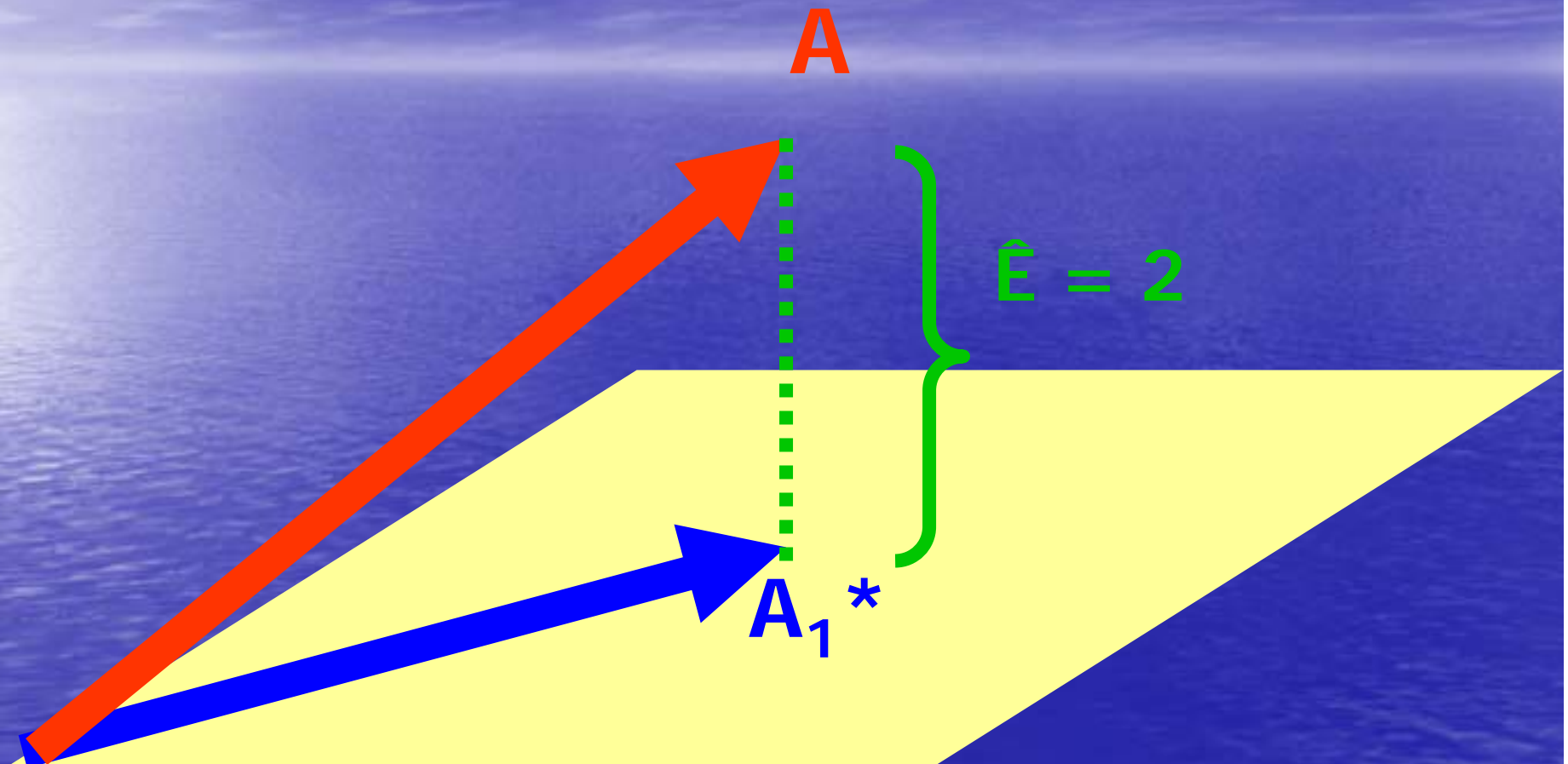
$A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_1^* =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el error

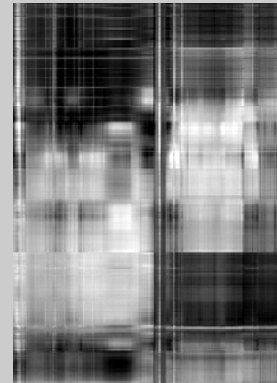


en imágenes

$A =$



$A_5^* =$



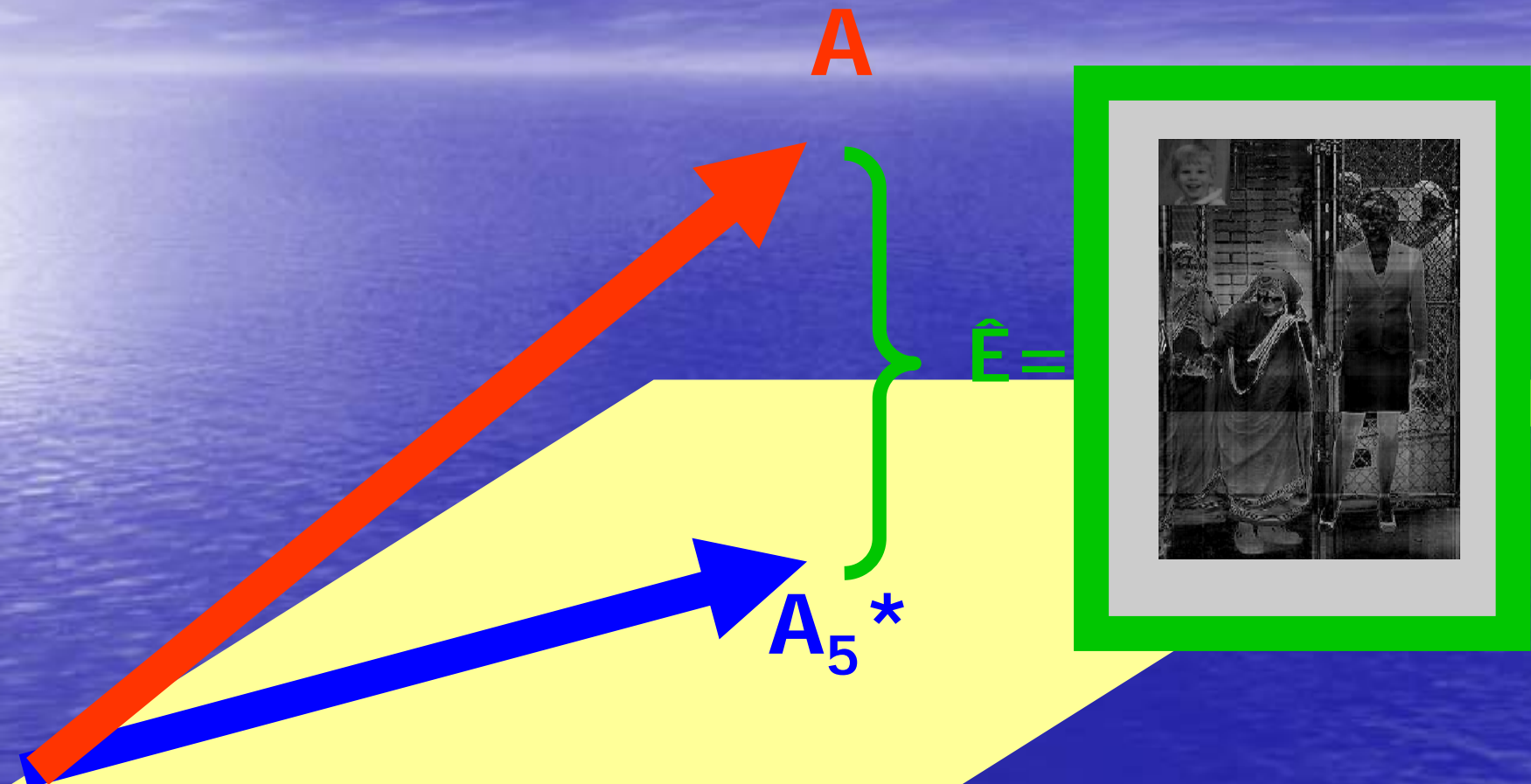
error-imagen

La matriz de error $E = A - A_k^*$ tiene una imagen que es :

Completamente negra si $A = A_k^*$, pues en tal caso es $E = 0$

El error-imagen es tanto más negro cuanto mejor la aproximación

el error-imagen



las matrices

3	7	4	1	4	3	8	9	17	6	4
6	5	4	3	3	3	3	2	3	5	6
4	4	4	4	5	5	6	6	7	9	9
5	4	4	4	5	6	6	10	10	10	11
6	5	4	4	4	4	4	9	9	9	8
6	5	4	4	4	4	4	9	8	8	7
4	4	4	4	4	5	5	9	9	8	8
3	3	3	4	4	5	8	8	8	8	7
4	3	2	2	2	2	5	6	6	6	6
21	34	32	35	27	19	19	18	22	25	
15	26	24	29	25	21	21	20	23	24	



47	47	47	47	47	48	48	48	48	48	48
46	47	47	48	48	48	48	48	48	48	49
46	47	47	48	48	48	48	48	48	48	49
47	47	47	48	48	48	48	48	48	48	49
47	47	48	48	48	48	48	48	48	48	49
47	47	48	48	48	48	48	48	48	48	49
47	48	48	48	49	48	48	48	48	48	49
47	48	48	49	49	48	48	48	48	48	49
48	48	48	48	48	48	48	47	47	47	48
47	48	48	48	48	48	47	47	47	47	48

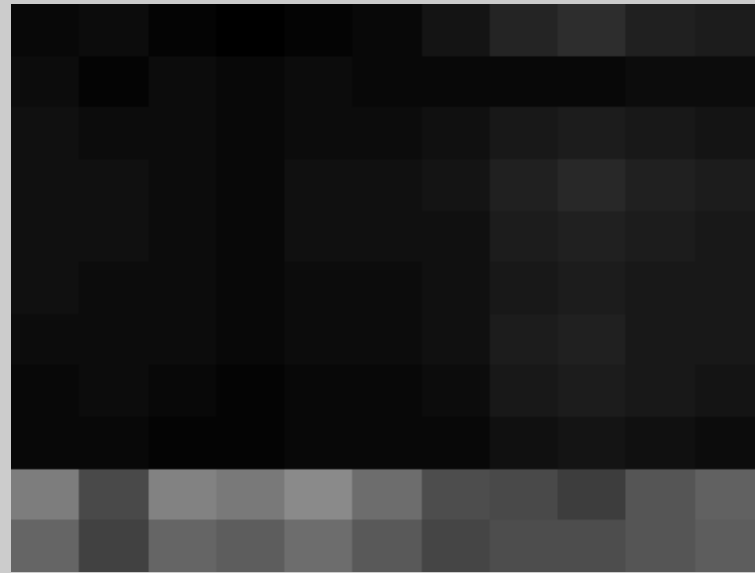
el fondo oscuro



σ_i	%
128,6	71,1
25,8	14,3
9,6	5,3
7,6	4,2
3,9	2,2
1,9	1,1
1,5	0,8
1,1	0,6
0,5	0,3
0,2	0,1
0,1	0,1

el fondo oscuro

Los valores singulares σ_1 y σ_2
concentran
el 85 % de la
información



el fondo oscuro

Los valores singulares σ_1 a σ_5
concentran
el 97 % de la
información



la falda blanca

si se considera sólo el primer valor
singular

se recogerá

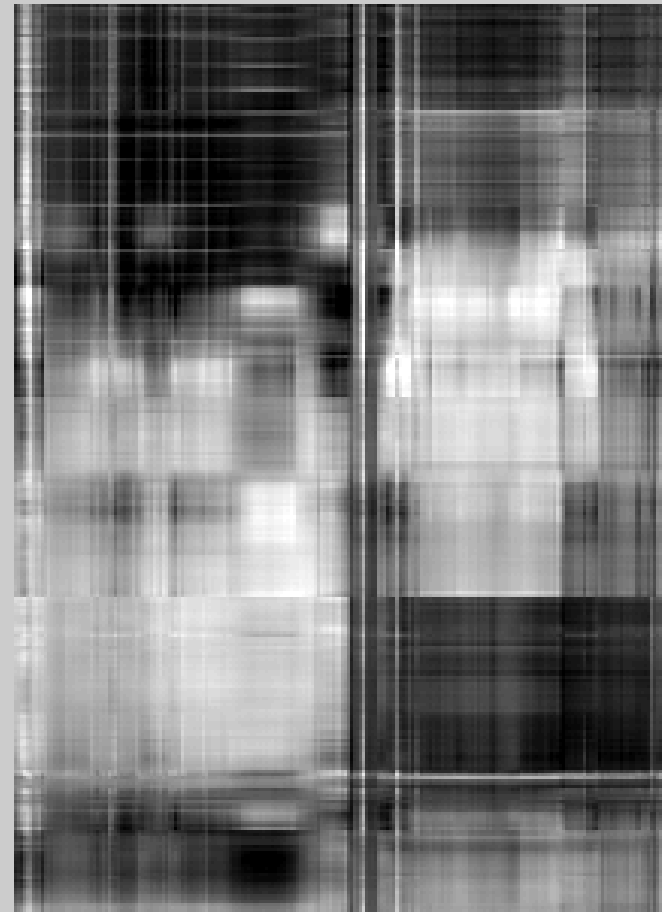
el 99 %

de la

información



MT & LDi, $k = 5$



MT & LDi, $k = 10$



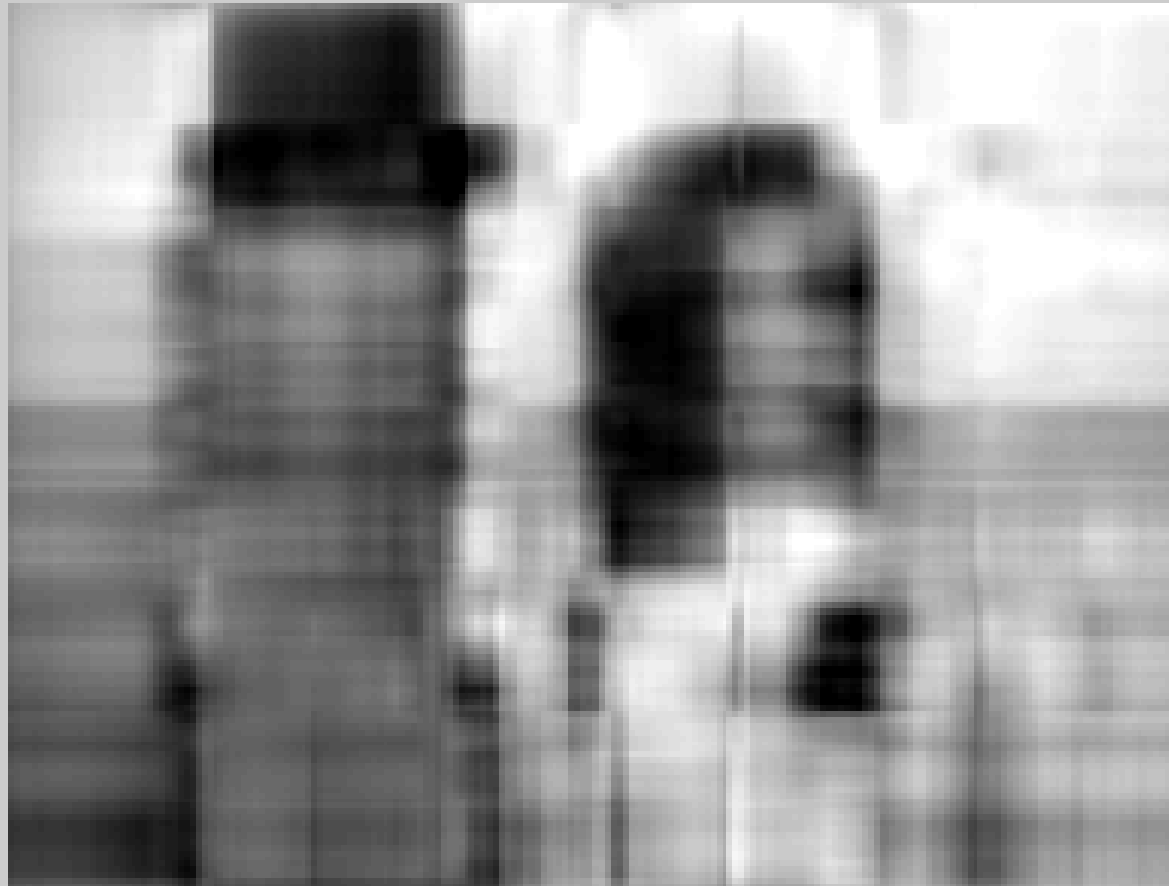
MT & LDi, $k = 15$



MT & LDi, $k = 20$



js & ep $k = 5$



js & ep $k = 10$



js & ep $k = 15$



js & ep $k = 20$



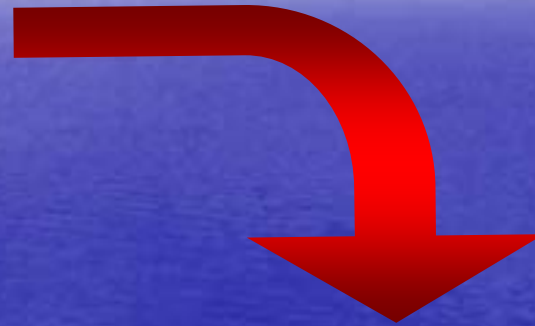
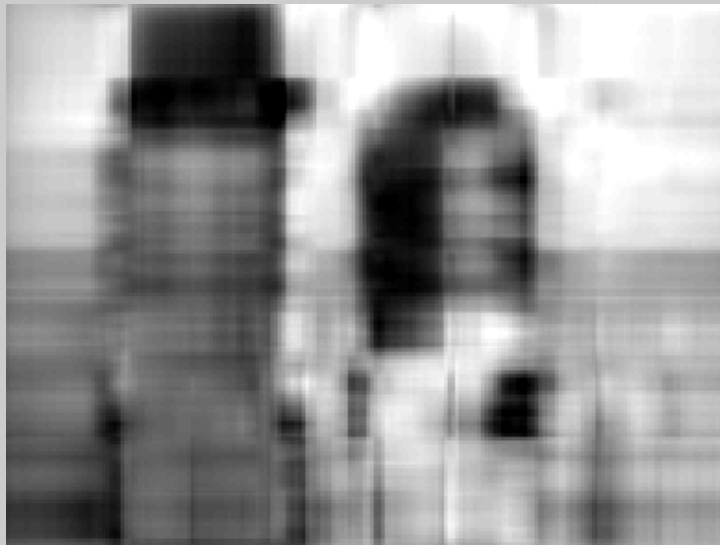
los vengadores

John Steed

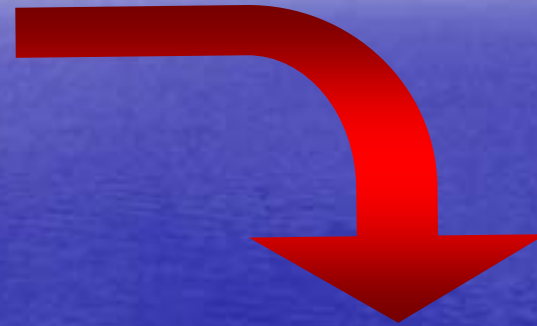


Emma Peel

error con $k = 5$



error con $k = 10$



el tamaño original

Para almacenar una imagen la matriz A exige conocer $n \times m$ enteros.

Una imagen de 480×640 pixels requiere almacenar 921600 elementos

Esto es, aproximadamente, 0.95 Mbytes.

el tamaño comprimido

Para almacenar A_k^* se necesita el espacio:

$n \times k$ para U , $k \times m$ V^T , k para S

En total, $(n + m + 1) \times k$



la compresión

la relación de compresión
es $r = (n+m+1) / nm$

para Borges, $n=480$, $m=640$
tenemos con $k = 50$ que la
imagen comprimida sólo
requiere un

18 %

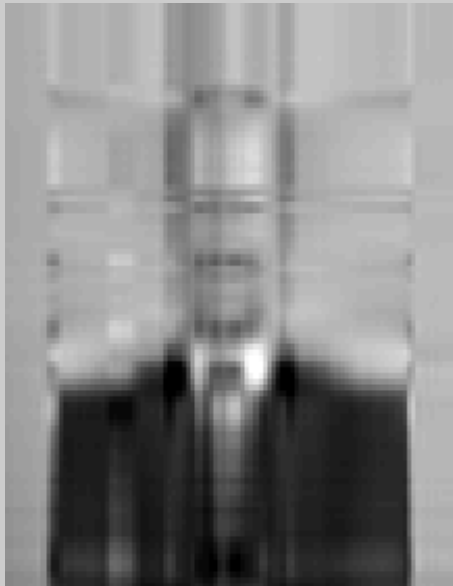
de la información original

el código matlab

```
function compresor(p,k)
```

```
p=imread(p);p=double(p); image(p);  
axis off;colormap(gray);  
[u,s,v] = svd(p);  
suma=u(:,1:k)*s(1:k,1:k)*v(:,1:k)';  
image(suma)
```


compresor ('germán.jpg', 1)



algunas mejoras



No toda imagen requiere un mismo k para ser satisfactoria

entonces se la divide en bloques

cada bloque i con un k_i

es claro que, p.ej., $k_1 < k_2$

luego se aplica la sdv a cada bloque

algunas mejoras



con la mejora,

11 %

de la información original

rgb, hsv, ntsc

Además de red-green-blue (rgb), se tiene hue-saturation-value (hsv) y ntsc television system

Cada pixel es un vector de \mathbb{R}^3 y se pasa de un sistema a otro mediante un cambio de base $S_1 = P S_2$, siendo P la matriz de pasaje.

rgb \rightarrow ntsc

Por ejemplo, para pasar de rgb a nstc se tiene:

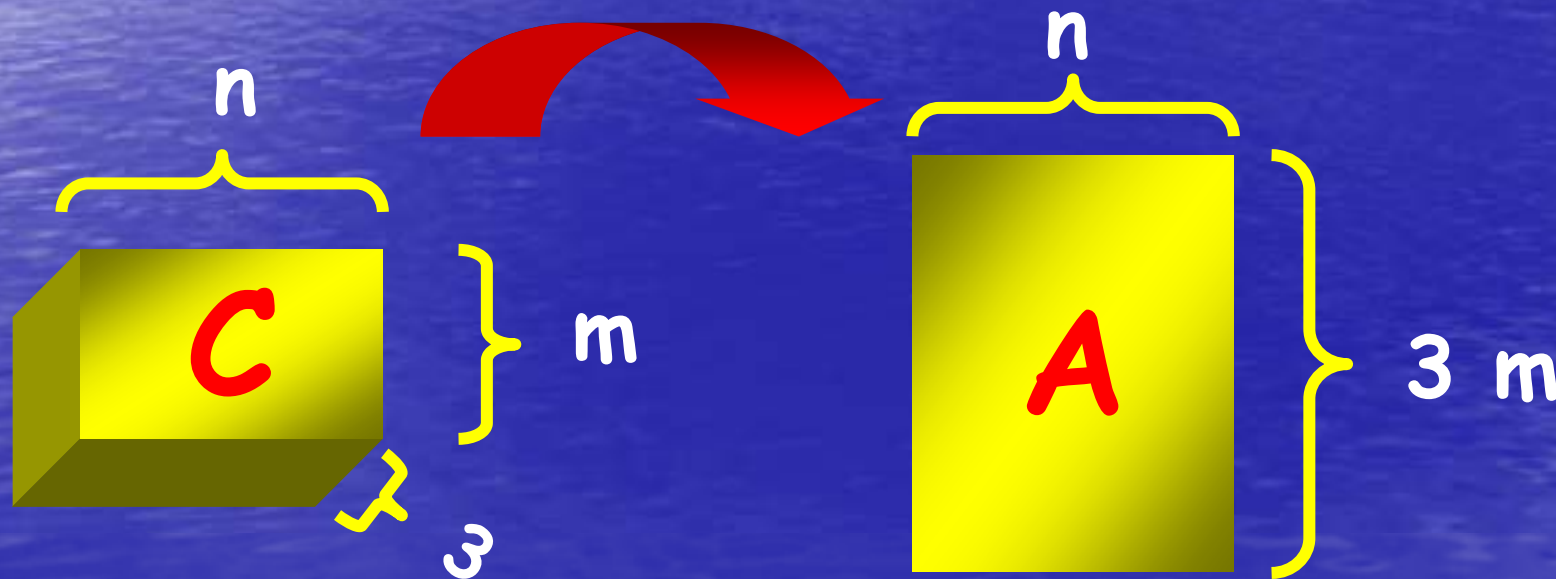
$$\begin{pmatrix} y \\ i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.6 & -0.3 & -0.3 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

Rgb es semejante a un sistema cartesiano, en tanto que nstc procede como coordenadas cilíndricas

color \rightarrow grises

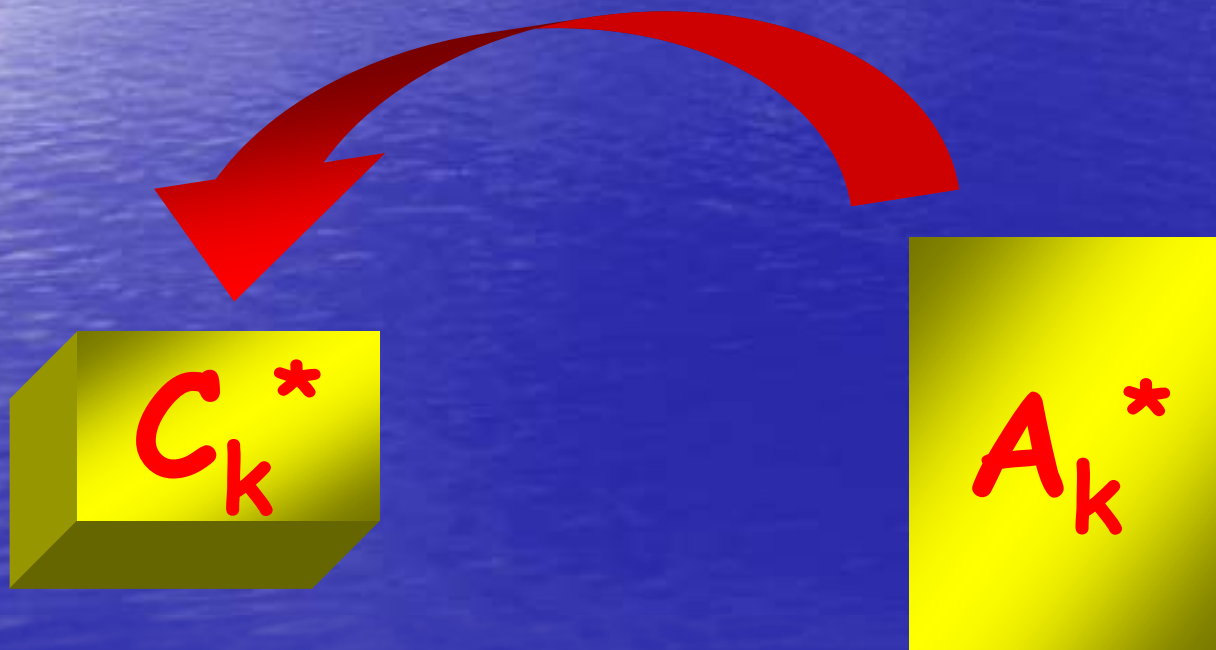
La compresión color es idéntica a la que ya hemos visto, basta redimensionar la matriz C de $n \times m \times 3$ (el 3 es el vector aludido) a una matriz A

A es sólo C 'aplanada', esto es, A es una matriz de $n \times (3m)$



grises \rightarrow color

A partir de A se obtiene A_k^* como antes y retornando a 3D resulta C_k^* , lo que completa la compresión





jpeg

Joint Experts Photographic Group es otra técnica de compresión que procesa la señal de salida de la transformada discreta coseno (Fourier).

svd y textos

Con m documentos d_1, d_2, \dots, d_m y n términos t_1, t_2, \dots, t_n se forma la matriz de datos D de $n \times m$ tal que $D(i,j)$ es el número de veces que el término i está presente en el documento j .

Luego se normaliza la matriz D (le llamaremos también D) dividiendo en el número de ocurrencias del término en todos los documentos

un ejemplo $D(i,j)$

Documento 1: 'Algebra lineal y compresión de textos'

Documento 2: 'Algebra y compresión de información'

Documento 3: 'Algebra lineal e imágenes'

Término 1: 'textos'

Término 2: 'lineal'

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

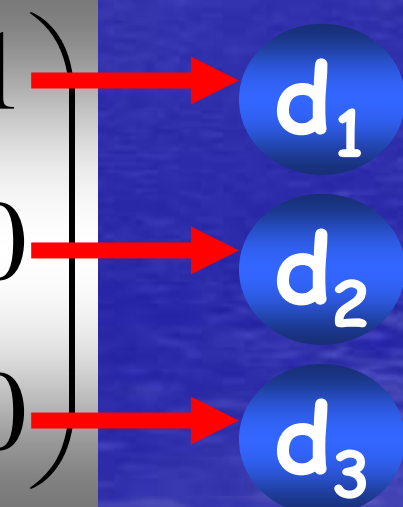


$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

un ejemplo

Ante una consulta en la base de documentos tal como ¿textos?, que el sistema traduce en el espacio de términos como $p = (1 \ 0)^T$, la pertinencia está dada (como es evidente) por :

$R = D^T p$, esto es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


The diagram illustrates the calculation of the relevance vector R for a query $p = (1, 0)^T$. The matrix D^T is $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. The resulting vector R is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Red arrows point from the components of R to three blue circles labeled d_1 , d_2 , and d_3 , indicating that the relevance is 1 for d_1 and 0 for d_2 and d_3 .

un ejemplo

Haciendo una descomposición svd $D = U S V^T$ y como $D^T = V S U^T$ se tiene que $R = V (S U^T p)$

$S U^T p$ es la proyección de la pregunta sobre el subespacio de los vectores singulares

R entonces resulta el mejor ordenamiento, habida cuenta de la información disponible

bibliografía

•Arnold, Ben, An investigation into using singular value decomposition as a method of image compression. University of Canterbury. 2002

•Lax, Peter, Linear algebra . Springer Verlag. 2001

The background of the slide features a serene landscape with a blue sky filled with wispy white clouds and a calm blue body of water below. A dark blue rectangular box with a slight gradient is centered on the slide, containing the text.

Agradecemos su atención