# Funciones de Variables Aleatorias

UCR – ECCI
CI-0115 Probabilidad y Estadística
Prof. Kryscia Daviana Ramírez Benavides

# Introducción

- En los métodos estadísticos estándar, el resultado de la prueba de hipótesis estadísticas, estimación o incluso las gráficas estadísticas no involucra a una sola variable aleatoria sino, más bien, a **funciones de una o más variables aleatorias**.

# Transformaciones de Variables

- Suponga que $X$ es una **variable aleatoria discreta** con distribución de probabilidad $f(x)$.
- Se define con $Y = u(X)$ una transformación uno a uno entre los valores de $X$ y $Y$ de modo que la ecuación $y = u(x)$ se puede resolver unívocamente para $x$ en términos de $y$, es decir $x = w(y)$.
- Entonces la distribución de probabilidad de $Y$ es

$$\begin{aligned} g(y) &= P(Y = y) \\ &= P[X = w(y)] \end{aligned}$$

$$g(y) = f[w(y)]$$

# Transformaciones de Variables (cont.)

- Suponga que $X_1$ y $X_2$ son **variables aleatorias discretas** con distribución de probabilidad conjunta $f(x_1,x_2)$.
- Se define con $Y_1 = u_1(X_1,X_2)$ y $Y_2 = u_2(X_1,X_2)$ una transformación uno a uno entre los puntos $(x_1,x_2)$ y $(y_1,y_2)$ de modo que las ecuaciones $y_1 = u_1(x_1,x_2)$ y $y_2 = u_2(x_1,x_2)$ se pueden resolver unívocamente para $x_1$ y $x_2$ en términos de $y_1$ y $y_2$, es decir $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ y $x_2 = w_2(y_1,y_2)$.
- Entonces la distribución de probabilidad conjunta de $Y_1$ y $Y_2$ es

$$g(y_1,y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$$
$$= P[X_1 = w_1(y_1,y_2), X_2 = w_2(y_1,y_2)]$$
$$g(y_1,y_2) = f[w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)]$$

# Transformaciones de Variables (cont.)

- La distribución de probabilidad de $Y_1$ es precisamente la distribución marginal de $g(y_1,y_2)$, que se encuentra al sumar los valores $y_2$.
- Al denotar la distribución de probabilidad de $Y_1$ por $h(y_1)$, se puede escribir

$$h(y_1) = \sum_{y_2} g(y_1, y_2)$$

# Transformaciones de Variables (cont.)

- La distribución de probabilidad de $Y_2$ es precisamente la distribución marginal de $g(y_1,y_2)$, que se encuentra al sumar los valores $y_1$.
- Al denotar la distribución de probabilidad de $Y_2$ por $h(y_2)$, se puede escribir

$$h(y_2) = \sum_{y_1} g(y_1, y_2)$$

# Transformaciones de Variables (cont.)

- Suponga que $X$ es una **variable aleatoria continua** con distribución de probabilidad $f(x)$.
- Se define con $Y = u(X)$ una transformación uno a uno entre los valores de $X$ y $Y$ de modo que la ecuación $y = u(x)$ se puede resolver unívocamente para $x$ en términos de $y$, es decir $x = w(y)$. Entonces la distribución de probabilidad de $Y$ es

$$\begin{aligned} g(y) &= P(Y = y) \\ &= P[X = w(y)] \end{aligned}$$

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

- Donde $J = w'(y)$ y se llama **jacobiano** de la transformación.

# Transformaciones de Variables (cont.)

- Suponga que $X_1$ y $X_2$ son **variables aleatorias continuas** con distribución de probabilidad conjunta $f(x_1,x_2)$.
- Se define con $Y_1 = u_1(X_1,X_2)$ y $Y_2 = u_2(X_1,X_2)$ una transformación uno a uno entre los puntos $(x_1,x_2)$ y $(y_1,y_2)$ de modo que las ecuaciones $y_1 = u_1(x_1,x_2)$ y $y_2 = u_2(x_1,x_2)$ se pueden resolver unívocamente para $x_1$ y $x_2$ en términos de $y_1$ y $y_2$, es decir $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ y $x_2 = w_2(y_1,y_2)$. Entonces la distribución de probabilidad conjunta de $Y_1$ y $Y_2$ es

$$g(y_1,y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$$
$$= P[X_1 = w_1(y_1,y_2), X_2 = w_2(y_1,y_2)]$$
$$g(y_1,y_2) = f[w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)]|J|$$

# Transformaciones de Variables (cont.)

- Donde el **jacobiano** es el determinante 2 × 2

$$J = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \partial x_1/\partial y_2 \\ \partial x_2/\partial y_1 & \partial x_2/\partial y_2 \end{vmatrix}$$

- Y cada celda de la matriz es una derivada parcial:
  - $\partial x_1/\partial y_1$ es la derivada de $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ con respecto a $y_1$ y $y_2$ permanece constante.
  - $\partial x_1/\partial y_2$ es la derivada de $x_1 = w_1(y_1,y_2)$ con respecto a $y_2$ y $y_1$ permanece constante.
  - $\partial x_2/\partial y_1$ es la derivada de $x_2 = w_2(y_1,y_2)$ con respecto a $y_1$ y $y_2$ permanece constante.
  - $\partial x_2/\partial y_2$ es la derivada de $x_2 = w_2(y_1,y_2)$ con respecto a $y_2$ y $y_1$ permanece constante.

# Transformaciones de Variables (cont.)

- Suponga que $X$ es una **variable aleatoria continua** con distribución de probabilidad $f(x)$.
- Sea $Y = u(X)$ una transformación entre los valores de $X$ y $Y$ que no es uno a uno. Si el intervalo sobre el que se define $X$ se puede dividir en $k$ conjuntos mutuamente disjuntos de modo que cada una de las funciones inversas $x_1 = w_1(y)$, $x_2 = w_2(y)$, …, $x_k = w_k(y)$ de $y = u(x)$ defina una correspondencia uno a uno, entonces la distribución de probabilidad de $Y$ es

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f\left[w_i(y)\right]\left|J_i\right|$$

donde $J_i = w_i'(y)$, $i = 1, 2, …, k$.

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos

- El propósito de la función generadora de momentos es la determinación de los momentos de las distribuciones.
- Sin embargo, la contribución más importante es establecer distribuciones de funciones de variables aleatorias.

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- El ***r-ésimo* momento alrededor del origen** de la variable aleatoria *X* está dado por

$$\mu_r' = E\left(X^r\right) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

- Como el primer y segundo momentos alrededor del origen están dados por $\mu_1' = E(X)$ y $\mu_2' = E(X^2)$, se puede escribir la media y la varianza de una variable aleatoria como

$$\mu = \mu_1' \quad \sigma^2 = \mu_2' - \mu^2$$

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- Aunque los momentos de una variable aleatoria se pueden determinar directamente de la definición anterior, existe un procedimiento alternativo.
- La **función generadora de momentos** de la variable aleatoria $X$ está dado por $E(e^{tx})$ y se denota con $M_x(t)$. De aquí

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- Las funciones generadoras de momentos existirán sólo si la suma o integral de la definición anterior converge.
- Si existe una función generadora de momentos de una variable aleatoria $X$, se puede utilizar para generar todos los momentos de dicha variable. El método se describe en el siguiente teorema.
- **Teorema.** Sea $X$ una variable aleatoria con función generadora de momentos $M_X(t)$. Entonces

$$\left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \mu_r'$$

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

| **Distribución** | $\boldsymbol{M_X(t)}$ |
| --- | --- |
| $b(x;n,p)$ | $\left(pe^t - q\right)^n$ |
| $b^*(x;k,p)$ | $\left(\dfrac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k$ |
| $g^*(x;p)$ | $\dfrac{pe^t}{1-qe^t}$ |
| $p(x;\lambda)$ | $e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$ |

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

| **Distribución** | $M_X(t)$ |
|---|---|
| $u(x;A,B)$ | $\dfrac{e^{tB}-e^{tA}}{t(B-A)}$ |
| $n(x;\mu,\sigma)$ | $e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}$ |
| $g(x;\alpha,\lambda=1/\beta)$ | $\left(\dfrac{1/\beta}{1/\beta-t}\right)^{\alpha}=\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha}$ |
| $e(x;\lambda=1/\beta)$ | $\dfrac{1/\beta}{1/\beta-t}=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$ |
| $ji(x;v)$ | $(1-2t)^{-v/2}$ |

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- Aunque el método de transformación de variables proporciona una forma efectiva de encontrar la distribución de una función de diversas variables, hay un procedimiento alternativo y que a menudo se prefiere cuando la función en cuestión es una combinación lineal de variables aleatorias independientes.
- Este procedimiento utiliza las propiedades de las funciones generadoras de momentos que se presentan en los siguientes cuatro teoremas.

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- **Teorema de Unicidad.** Sean $X$ y $Y$ dos variables aleatorias con funciones generadoras de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t)$, respectivamente. Si $M_X(t) = M_Y(t)$ para todos los valores de $t$, entonces $X$ y $Y$ tienen la misma distribución de probabilidad.
- **Teorema.** $M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t)$.
- **Teorema.** $M_{aX}(t) = M_X(at)$.
- **Teorema.** Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos $M_{X1}(t), M_{X2}(t), \ldots, M_{Xn}(t)$, respectivamente, y $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, entonces

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t)$$

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- **Combinaciones lineales de variables aleatorias**
  - **Teorema.** Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales con medias $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots \sigma_n^2$ respectivamente, entonces la variable aleatoria

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$$

tiene una distribución normal con media

$$\mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n$$

y varianza

$$\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$$

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- **Combinaciones lineales de variables aleatorias**
  - **Teorema.** Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias mutuamente independientes que tienen, respectivamente, distribuciones ji cuadradas con $v_1, v_2, \ldots v_n$ grados de libertad, entonces la variable aleatoria

    $$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

    tiene una distribución ji cuadrada con

    $$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

    grados de libertad

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- **Combinaciones lineales de variables aleatorias**
  - **Corolario.** Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales idénticas con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$, entonces la variable aleatoria

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

tiene una distribución ji cuadrada con $v = n$ grados de libertad

# Momentos y Funciones Generadoras de Momentos (cont.)

- **Combinaciones lineales de variables aleatorias**
  - **Corolario.** Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales estándar, entonces la variable aleatoria

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

    tiene una distribución ji cuadrada con $v = n$ grados de libertad

# Referencias Bibliográficas


- Walpole, R.E.; Myers, R.H.; Myers, S.L. & Ye, K. “Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias”. Octava Edición. Pearson Prentice-Hall. México, 2007.