Esperanza Matemática

UCR – ECCI

CI-0115 Probabilidad y Estadística

Prof. Kryscia Daviana Ramírez Benavides

Media de una Variable Aleatoria

- Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La **media** o **valor esperado** de X es
  - Si X es discreta

$$\mu = \mu_X = E(X) = \sum_x x f(x)$$

  - Si X es continua

$$\mu = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Media de una Variable Aleatoria (cont.)

- **Teorema.** Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La media o valor esperado de la variable aleatoria $g(X)$ es
  - Si X es discreta

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_{x} g(x) f(x)$$

  - Si X es continua

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Media de una Variable Aleatoria (cont.)

- Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. La **media** o **valor esperado** de la variable aleatoria $g(X,Y)$ es
  - Si X y Y son discretas

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_{y}\sum_{x} g(x,y)f(x,y)$$

  - Si X y Y son continuas

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

Media de una Variable Aleatoria (cont.)

- Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. La **media** o **valor esperado** de la variable aleatoria X es
  - Si X y Y son discretas

$$\mu_X = E(X) = \sum_y \sum_x x f(x,y) = \sum_x x g(x)$$

  - Si X y Y son continuas

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\, dx$$

Media de una Variable Aleatoria (cont.)

- Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. La **media** o **valor esperado** de la variable aleatoria Y es
  - Si X y Y son discretas

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_y \sum_x y f(x,y) = \sum_y y h(y)$$

  - Si X y Y son continuas

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)\, dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y h(y)\, dy$$

Varianza y Covarianza

- Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$ y la media μ. La **varianza** de X es
  - Si X es discreta

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

  - Si X es continua

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

- La raíz cuadrada positiva de la varianza, σ, se llama **desviación estándar** de X.

Varianza y Covarianza (cont.)

- La cantidad $x - \mu$ se llama desviación estándar de una observación respecto a su media.
- Cuando estas desviaciones se elevan al cuadrado y después se promedian, σ^2 será mucho menor para un conjunto de valores x que sean cercanos a μ, que para un conjunto de valores que varíe de forma considerable de μ.

Varianza y Covarianza (cont.)

- **Teorema.** La varianza de una variable aleatoria *X* es

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

- **Prueba.** Caso discreto (el caso continuo es igual, pero en vez de sumatorias son integrales).

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = Var(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

$$\sigma^2 = \sum_x \left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right) f(x)$$

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x)$$

$$\mu = \sum_x x f(x) \text{ y } \sum_x f(x) = 1$$

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Varianza y Covarianza (cont.)

- **Teorema.** Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La varianza de la variable aleatoria $g(X)$ es
  - Si X es discreta

$$\sigma^2_{g(X)} = Var[g(X)] = E\left[\left(g(X) - \mu_{g(X)}\right)^2\right] = \sum_x \left(g(x) - \mu_{g(X)}\right)^2 f(x)$$

  - Si X es continua

$$\sigma^2_{g(X)} = Var[g(X)] = E\left[\left(g(X) - \mu_{g(X)}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(g(x) - \mu_{g(X)}\right)^2 f(x)\,dx$$

Varianza y Covarianza (cont.)

- Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. La **covarianza** de X y Y es
  - Si X y Y son discretas

$$\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_y \sum_x (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)$$

  - Si X y Y son continuas

$$\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)\,dx\,dy$$

Varianza y Covarianza (cont.)

- La covarianza de dos variables aleatorias es una medida de la naturaleza de la asociación entre las dos.
- La covarianza sólo describe la **relación lineal** entre dos variables aleatorias.
  - Describe la naturaleza de la relación.
  - Si la covarianza es positiva significa que X y Y son linealmente ascendentes (valores grandes de X estarán relacionados con valores grandes de Y, y valores pequeños de X estarán relacionados con valores pequeños de Y).
  - Si la covarianza es negativa significa que X y Y son linealmente descendentes (valores grandes de X estarán relacionados con valores pequeños de Y, y viceversa).

Varianza y Covarianza (cont.)

- Cuando X y Y son estadísticamente independientes la covarianza es cero. Lo opuesto, sin embargo, por lo general no es cierto. Dos variables pueden tener covarianza cero e incluso así no ser estadísticamente independientes.
- Una covarianza entre X y Y es cero, quizá indica que X y Y no tiene una relación lineal, pero no que sean independientes.

Varianza y Covarianza (cont.)

- **Teorema.** La covarianza de dos variables aleatorias X y Y con medias μ_X y μ_Y, respectivamente, está dada por

$$\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

- **Prueba.** Caso discreto (el caso continuo es igual, pero en vez de sumatorias son integrales).

$$\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)$$

$$\sigma_{XY} = \sum_x \sum_y (xy - \mu_X y - \mu_Y x + \mu_X \mu_Y) f(x,y)$$

$$\sigma_{XY} = \sum_x \sum_y xyf(x,y) - \mu_X \sum_x \sum_y yf(x,y) - \mu_Y \sum_x \sum_y xf(x,y) + \mu_X \mu_Y \sum_x \sum_y f(x,y)$$

$$\mu_X = \sum_x xf(x,y),\ \mu_Y = \sum_y yf(x,y) \text{ y } \sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

Varianza y Covarianza (cont.)

- Sean X y Y variables aleatorias con covarianza σ_{XY} y desviación estándar σ_X y σ_Y, respectivamente. El coeficiente de correlación X y Y es

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- El coeficiente de correlación satisface la desigualdad

  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

- El coeficiente de correlación describe la fuerza de la relación. Es una medida del grado de relación lineal entre X y Y, y sólo cuando las dos v.a. están perfectamente relacionadas de una manera lineal ρ será positiva o negativa

Varianza y Covarianza (cont.)

- Si a y c son constantes, ya sea, ambas positivas o ambas negativas $$\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X, Y)$$
- La fuerza de la relación es fuerte si $|\rho| \geq 0.8$, moderada si $0.5 < |\rho| < 0.8$ y débil si $|\rho| \leq 0.5$.
- Si X y Y son estadísticamente independientes, entonces $\rho = 0$, pero $\rho = 0$ no implica independencia.
- $\rho = 1$ o -1 si y sólo si $Y = aX + b$ para algunos números a y b con $a \neq 0$.

Varianza y Covarianza (cont.)

- Una $\rho < 1$ en valor absoluto indica sólo que la relación no es completamente lineal, pero todavía puede haber una fuerte relación no lineal.
- Un $\rho = 0$ no implica que X y Y sean estadísticamente independientes, sino sólo que hay completa ausencia de una relación lineal. Además, se dice que X y Y son **no correlacionadas**.
  - Dos variables aleatorias pueden ser no correlacionadas pero altamente dependientes porque hay una fuerte relación no lineal, por lo que se debe tener cuidado para no concluir demasiado con saber que $\rho = 0$.

Varianza y Covarianza (cont.)

Sean X y Y las *va* discretas con pmf conjunta

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x, y) = (-4, 1), (4, -1), (2, 2), (-2, -2) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Los puntos que reciben probabilidad de masa positiva están identificados en el sistema coordenado (x, y) de la figura 5.5. Es evidente, de la figura, que el valor de X está determinado por completo por el valor de Y y viceversa, por lo que las dos variables son por completo dependientes. Sin embargo, por simetría $\mu_X = \mu_Y = 0$ y $E(XY) = (-4)\frac{1}{4} + (-4)\frac{1}{4} + (4)\frac{1}{4} + (4)\frac{1}{4} =$ y $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \cdot \mu_Y = 0$ y entonces $\rho_{X,Y} = 0$. Aun cuando hay perfecta dependencia, también hay completa ausencia de cualquier relación lineal.

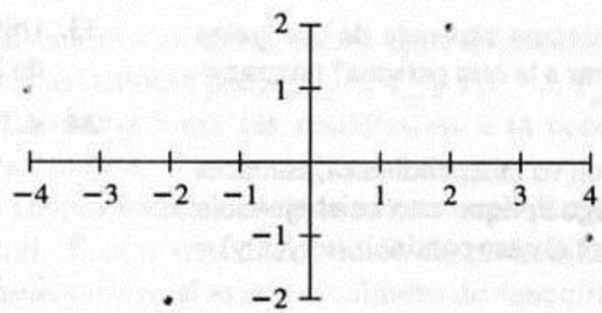


Figura 5.5 La población de pares para el ejemplo 5.18

Medias y Varianzas de Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias

- **Teorema.** Si a y b son constantes, entonces

$$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$$

- **Corolario.** Al hacer $a = 0$, se ve que $E(b) = \pm b$
- **Corolario.** Al hacer $b = 0$, se ve que $E(aX) = aE(X)$
- **Prueba.** Caso continuo (el caso discreto es igual, pero en vez de integrales son sumatorias).

$$E(aX \pm b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax \pm b) f(x) dx$$

$$E(aX \pm b) = a\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \pm b\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \text{ y } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$$

Medias y Varianzas de Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias

- **Teorema.** El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de una variable aleatoria *X*, es la suma o diferencia de los valores esperados de las funciones. Es decir,

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]$$

- **Prueba.** Caso continuo (el caso discreto es igual, pero en vez de integrales son sumatorias).

$$E(g(x) \pm h(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) \pm h(x)) f(x) dx$$

$$E(g(x) \pm h(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$$

$$E(g(x) \pm h(x)) = E(g(x)) \pm E(h(x))$$

Medias y Varianzas de Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias (cont.)

- **Teorema.** El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de las variables aleatorias X y Y, es la suma o diferencia de los valores esperados de las funciones. Es decir,

$$E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)]$$

- **Corolario.** Al hacer $g(X,Y) = g(X)$ y $h(X,Y) = h(Y)$, se ve que $E[g(X) \pm h(Y)] = E[g(X)] \pm E[h(Y)]$
- **Corolario.** Al hacer $g(X,Y) = X$ y $h(X,Y) = Y$, se ve que

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E\left(g(x,y) \pm h(x,y)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(g(x,y) \pm h(x,y)\right) f(x,y)\,dxdy$$

$$E\left(g(x,y) \pm h(x,y)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,dxdy \pm \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) f(x,y)\,dxdy$$

$$E\left(g(x,y) \pm h(x,y)\right) = E\left(g(x,y)\right) \pm E\left(h(x,y)\right)$$

Medias y Varianzas de Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias (cont.)

- **Teorema.** Sean X y Y dos variables aleatorias independientes. Entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$
- **Prueba.** Caso continuo (el caso discreto es igual, pero en vez de integrales son sumatorias).

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy$$

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyg(x)h(y)\,dxdy$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} yh(y)\,dy$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Medias y Varianzas de Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias (cont.)

- **Teorema.** Si a y b son constantes, entonces

$$\sigma^2_{aX+b} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2$$

- **Corolario.** Al hacer $a = 1$, se ve que $\sigma^2_{X+b} = \sigma^2_X = \sigma^2$
- **Corolario.** Al hacer $b = 0$, se ve que $\sigma^2_{aX} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2$
- **Prueba.**

$$\sigma^2_{aX+b} = E\left[\left(aX + b - \mu_{aX+b}\right)^2\right]$$

$$\mu_{aX+b} = E(aX+b) = aE(X) + b = a\mu_X + b$$

$$\sigma^2_{aX+b} = E\left\{\left[(aX+b) - (a\mu_X + b)\right]^2\right\} = E\left[\left(aX + b - a\mu_X - b\right)^2\right]$$

$$\sigma^2_{aX+b} = E\left[\left(aX - a\mu_X\right)^2\right] = a^2 E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right] = a^2\sigma^2_X$$

Medias y Varianzas de Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias (cont.)

- **Teorema.** Si X y Y son variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$, entonces

$$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$$

- **Teorema.** Si X y Y son variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$, entonces

$$\sigma^2_{aX-bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y - 2ab\sigma_{XY}$$

- **Prueba.**

$$\sigma^2_{aX+bY} = E\left[\left(aX+bY-\mu_{aX+bY}\right)^2\right]$$

$$\mu_{aX+bY} = E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y) = a\mu_X + b\mu_Y$$

$$\sigma^2_{aX+bY} = E\left\{\left[(aX+bY)-(a\mu_X+b\mu_Y)\right]^2\right\} = E\left[\left(aX+bY-a\mu_X-b\mu_Y\right)^2\right]$$

$$\sigma^2_{aX+bY} = E\left\{\left[a(X-\mu_X)+b(Y-\mu_Y)\right]^2\right\} = a^2E\left[(X-\mu_X)^2\right]+b^2E\left[(Y-\mu_Y)^2\right]+2abE\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

$$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$$

Medias y Varianzas de Combinaciones Lineales de Variables Aleatorias (cont.)

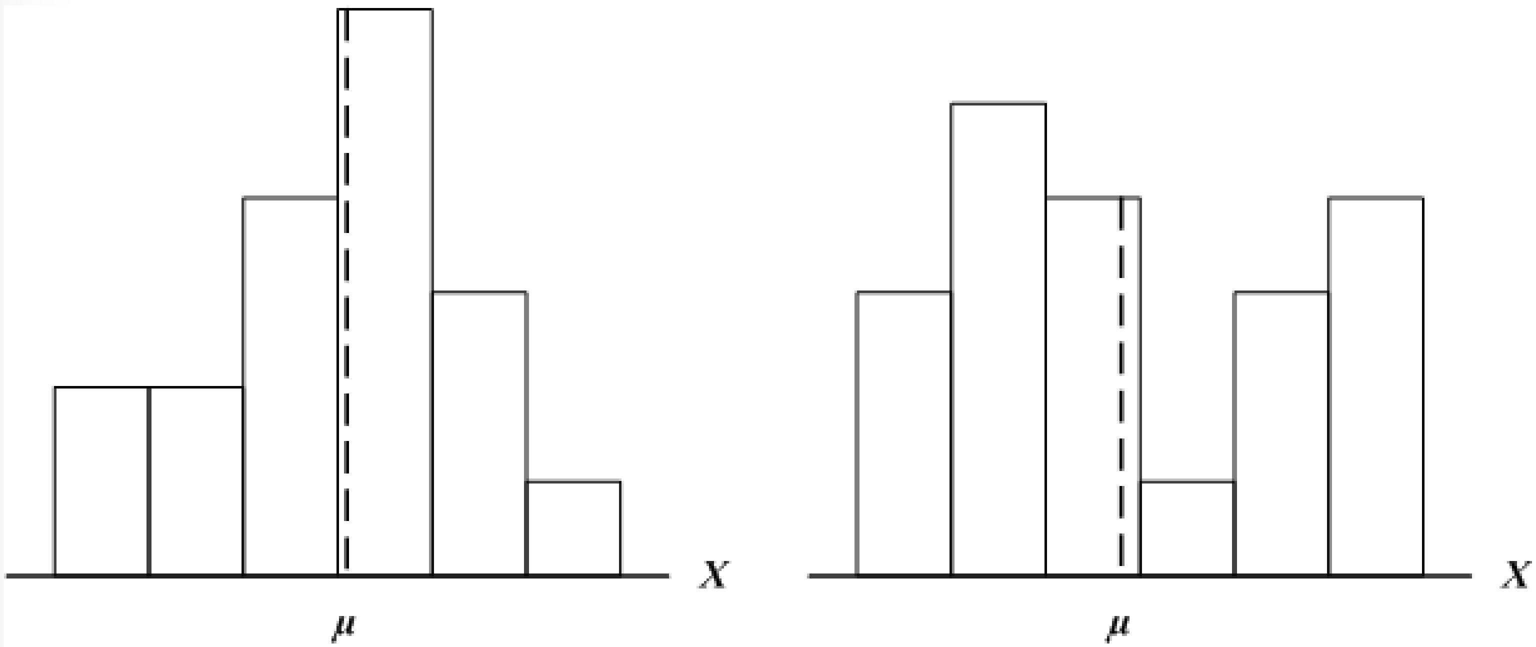
- **Corolario.** Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y$
- **Corolario.** Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $\sigma^2_{aX-bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y$
- **Corolario.** Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$\sigma^2_{a1X1 + a2X2 + \ldots + anXn} = a^2_1\sigma^2_{X1} + a^2_2\sigma^2_{X2} + \ldots + a^2_n\sigma^2_{Xn}$$

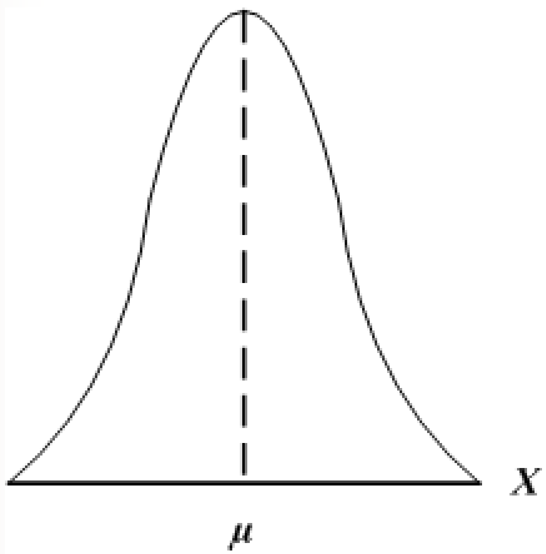
Teorema de Chebyshev

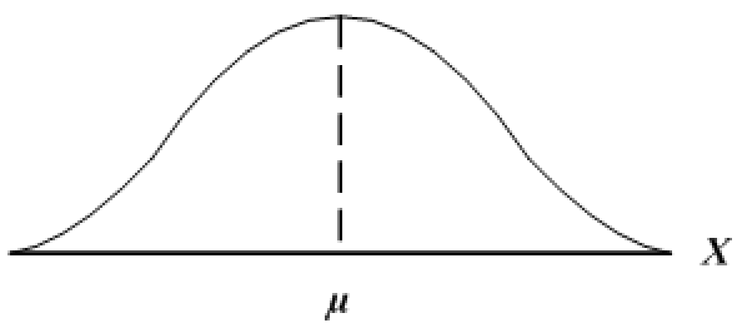
- Si una V.A. tiene una varianza o desviación estándar pequeña, se esperaría que la mayoría de los valores se agruparan alrededor de la media.
  - Ver las figuras de las filminas 24 y 25.
- El matemático ruso P.L. Chebyshev descubrió que la fracción del área entre cualesquiera dos valores simétricos alrededor de la media está relacionada con la desviación estándar.
- Como el área bajo una curva de distribución de probabilidad, o en un histograma de probabilidad, suma 1, el área entre cualesquiera dos números es la probabilidad de que la V.A. tome un valor entre estos números.

Teorema de Chebyshev (cont.)



Teorema de Chebyshev (cont.)





Teorema de Chebyshev (cont.)

- La probabilidad de que cualquier variable aleatoria *X* tome un valor dentro de *k* desviaciones estándar de la media es al menos $1 - 1/k^2$. Es decir,

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

- Este teorema tiene validez para cualquier distribución de observaciones y, por esta razón, los resultados por lo general son débiles.

Teorema de Chebyshev (cont.)

- El valor que el teorema proporciona es sólo un límite inferior; es decir, la probabilidad de una variable aleatoria caiga dentro de dos desviaciones estándar de la media **no puede ser menor a $1 - 1/k^2$**.
- Sólo cuando se conoce la distribución de probabilidad, se puede determinar probabilidades exactas.
- Por esta razón el teorema se conoce por el nombre de **distribución libre**.
- El uso de este teorema se relega a situaciones donde se desconoce la forma de la distribución.

Referencias Bibliográficas

- Walpole, R.E.; Myers, R.H.; Myers, S.L. & Ye, K. "Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias". Octava Edición. Pearson Prentice-Hall. México, 2007.