UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA
CI-1204 ESTRUCTURAS DISCRETAS
PROF. KRYSCIA DAVIANA RAMÍREZ BENAVIDES
II Semestre 2016 **Fecha: 24/09/2016**

SOLUCIÓN EXAMEN PARCIAL I

Nombre del estudiante: ____

El examen consta de 8 preguntas que suman 100 puntos, para ser respondidas en un tiempo de 3 horas. Se evalúan los temas de combinatoria, recursividad y relaciones de recurrencia.
Para resolver los problemas puede hacer uso de una calculadora no programable y de una hoja tamaño carta, escrita a mano por Usted mismo y con su nombre, que contenga fórmulas que podría necesitar.
Justifique todas sus respuestas, muestre el desarrollo de su trabajo paso a paso.

1. **(7.5pts)** Un profesor da las calificaciones del primer examen a su grupo de 20 alumnos por orden alfabético.
   a. (2.5pts) ¿Cuántas calificaciones pueden haber sabiendo que son números del 1 al 10?
   R/. Importa el orden (orden alfabético)
   Se utilizan algunos elementos de la población (se puede usar como no usar una calificación)
   Con repetición (varios alumnos pueden tener la misma calificación)
   $\Rightarrow$ Variación con repetición, con n = 10 calificaciones distintas (1-10) y r = 20 alumnos (una calificación por alumno)
   $$VR_{n,r} = n^r$$
   $$VR_{10,20} = 10^{20} = 100000000000000000000$$
   $\underline{10}$

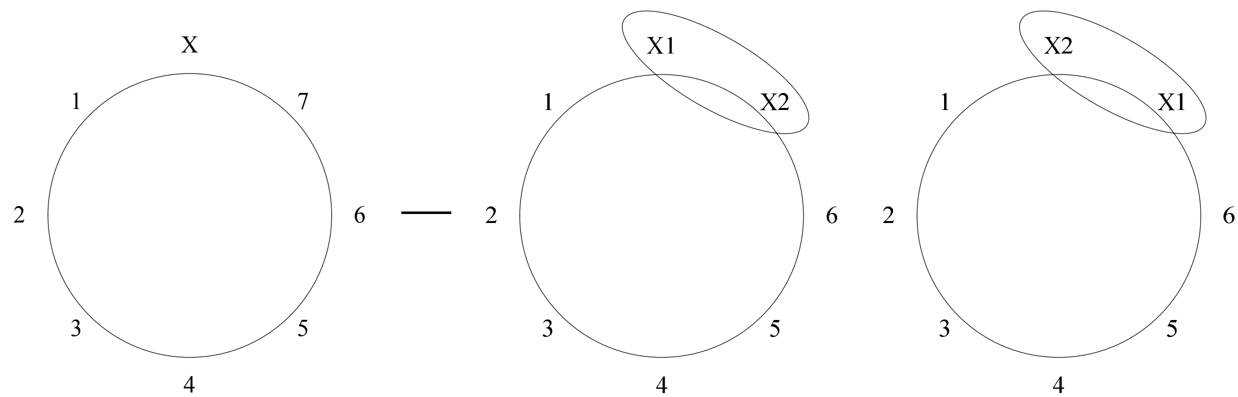
   b. (2.5pts) ¿Cuántas calificaciones pueden haber si sólo se tiene en cuenta aprobado o reprobado?
   R/. Importa el orden (orden alfabético)
   No se utilizan todos los elementos de la población (se puede usar como no usar una calificación)
   Con repetición (varios alumnos pueden tener la misma calificación)
   $\Rightarrow$ Variación con repetición, con n = 2 calificaciones distintas (aprobado y reprobado) y r = 20 alumnos (una calificación por alumno)
   $$VR_{n,r} = n^r$$
   $$VR_{2,20} = 2^{20} = 1048576$$
   $\underline{2}$

   c. (2.5pts) ¿Cuántas calificaciones pueden haber si el profesor decide dar dos sobresalientes, cuatro notables, seis aprobados y ocho reprobados?
   R/. Importa el orden (orden alfabético)
   Se utilizan todos los elementos de la población (calificaciones de 20 alumnos)
   Con repetición (varios alumnos pueden tener la misma calificación y hay categorías)
   $\Rightarrow$ Permutación con repetición, con n = 20 calificaciones (una por alumno), n_1 = 2 sobresalientes, n_2 = 4 notables, n_3 = 6 aprobados, y n_4 = 8 reprobados
   $$PR^{n}_{n1,n2,\ldots,nk} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$
   $$PR^{20}_{2,4,6,8} = \frac{20!}{2!4!6!8!} = 1745944200$$

2. **(7.5pts)** Se tienen que sentar 8 personas en torno a una mesa circular.

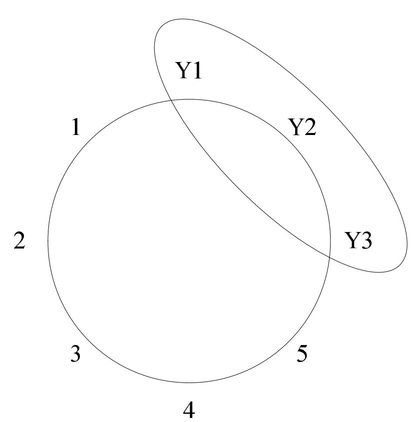
a. (2.5pts) ¿De cuántas formas se pueden sentar esas personas en torno a la mesa, si dos mujeres no se llevan bien y no desean estar juntas?

R/. Importa el orden (depende del lugar en la mesa)
Se utilizan todos los elementos de la población (las 8 personas)
Sin repetición (una persona no puede sentarse en dos o más lugares al mismo tiempo)
$\Rightarrow$ Permutación circular, con $n = 8$ personas distintas $PC_n = (n-1)!$
Sin restricciones: sentar alrededor de la mesa circular 8 personas $\Rightarrow$ $PC_8 = 7! = 5040$
Condición: sentar a dos mujeres juntas alrededor de la mesa circular $\Rightarrow$ $P_2 PC_7 = 2!6! = 1440$
Restricción: sentar a las 8 personas en torno a la mesa circular y dos mujeres no deben estar juntas
Al total de agrupaciones se le quitan el total de agrupaciones donde las mujeres están sentadas juntas
$7! - 2!6! = 5040 - 1440 = 3600$



b. (2.5pts) ¿De cuántas formas se pueden sentar esas personas en torno a la mesa, si tres hombres son muy amigos y desean estar juntos?

R/. Importa el orden (depende del lugar en la mesa)
Se utilizan todos los elementos de la población (las 8 personas)
Sin repetición (una persona no puede sentarse en dos o más lugares al mismo tiempo)
$\Rightarrow$ Permutación circular, con $n = 8$ personas distintas
Restricción: sentar a las 8 personas en torno a la mesa circular y tres hombres deben estar juntos
$P_3 PC_6 = 3!5! = 6 * 120 = 720$



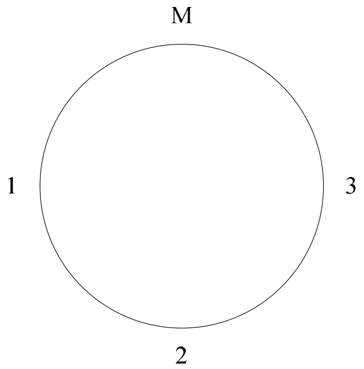
3	2	1
Y1	Y2	Y3

c. (2.5pts) ¿De cuántas formas se pueden sentar esas personas en torno a la mesa si están compuestas por 4 matrimonios y cada pareja debe estar junta?

R/. Importa el orden (depende del lugar en la mesa)
Se utilizan todos los elementos de la población (los 4 matrimonios)
Sin repetición (un matrimonio no puede sentarse en dos o más lugares al mismo tiempo)

⇒ Permutación circular, con n = 4 matrimonios distintos

$P_2{}^4 PC_4 = 2!^4\, 3! = 16 * 6 = 96$



M = X + Y

2	1
X	Y

4M ⇒ $(2*1)^4 = 2^4 = 16$

3. **(10pts)** Se tienen los elementos del conjunto A = {1, 3, 5, 7, 9}.
   a. (2.5pts) ¿Cuántos números de tres dígitos distintos se pueden formar con los elementos del conjunto si debe estar presente el elemento 5?
   R/. Importa el orden (al cambiar un dígito de posición es otro número)
   No se utilizan todos los elementos de la población (sólo 3 de 5 dígitos)
   Sin repetición (números de tres dígitos distintos)
   ⇒ Variación sin repetición, con n = 5 dígitos distintos (dígitos impares) y r = 3 dígitos distintos (números de 3 cifras)
   $V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
   Restricción: debe estar presente el elemento 5
   Por lo que sólo quedan 4 elementos a usar del conjunto y dos campos en el número para completar ⇒ n = 4 dígitos distintos (dígitos impares menos el 5) y r = 2 dígitos distintos (números de 3 cifras, un campo ya reservado para el 5)
   El dígito 5 puede estar en el primer puesto, en el segundo puesto o en el tercer puesto
   $V_{4,2} * 3 = \frac{4!}{(4-2)!} * 3 = \frac{24}{2} * 3 = 12 * 3 = 36$

1	4	3		4	1	3		4	3	1
5	Los otros elementos		+	Los otros elementos	5	Los otros elementos	+	Los otros elementos		5

   b. (2.5pts) ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los elementos del conjunto si no debe estar presente el elemento 9?
   R/. Importa el orden (al cambiar un dígito de posición es otro número)
   No se utilizan todos los elementos de la población (sólo 3 de 5 dígitos)
   Con repetición (números de tres dígitos)
   ⇒ Variación con repetición, con n = 3 dígitos (números de 3 cifras) y r = 5 dígitos distintos (dígitos impares)
   $VR_{n,r} = n^r$
   Restricción: no debe estar presente el elemento 9
   Por lo que sólo quedan 4 elementos a usar del conjunto ⇒
   n = 3 dígitos (números de 3 cifras) y r = 4 dígitos distintos (dígitos impares menos el 9)
   $V_{4,3} = 4^3 = 64$

4 4 4

c. (2.5pts) ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos se pueden formar si debe estar presente el elemento 1 y no estar presente el elemento 3?
R/. No importa el orden (no importan como se ordenen los elementos de un subconjunto, da lo mismo)
No se utilizan todos los elementos de la población (sólo 3 de 5 dígitos)
Sin repetición (los subconjuntos no tienen elementos repetidos)
$\Rightarrow$ Combinación sin repetición, con $n = 5$ elementos distintos (dígitos impares) y $r = 3$ elementos distintos (subconjuntos de tamaño 3)

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Restricción: debe estar presente el elemento 1 y no estar presente el elemento 3
Por lo que sólo quedan 3 elementos a usar del conjunto y dos campos en el subconjunto para completar
$\Rightarrow n = 3$ elementos distintos (dígitos impares menos el 1 y el 3) y $r = 2$ elementos distintos (subconjuntos de tamaño 3, un campo ya reservado)

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2*1} = 3$$

1	3	2
1	Elementos 5, 7 o 9	

Se divide entre 2 (campos a completar) ya que no importa el orden

d. (2.5pts) ¿Cuántas combinaciones con repetición de orden tres se pueden formar con el conjunto?
R/. No importa el orden (no importan como se ordenen los elementos da lo mismo)
No se utilizan todos los elementos de la población (sólo 3 de 5 dígitos)
Con repetición (combinaciones con repetición)
$\Rightarrow$ Combinación sin repetición, con $n = 5$ elementos distintos (dígitos impares) y $r = 3$ elementos distintos (combinaciones de orden 3)

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

$$CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35 = \binom{7}{3} = C_{7,3}$$

$$\frac{1}{1}\;\frac{1}{1}\;\frac{5}{\text{Cualquier elemento}} + \frac{1}{1}\;\frac{1}{3}\;\frac{4}{\text{Cualquier elemento menos el 1 (combinación)}} + \frac{1}{1}\;\frac{1}{5}\;\frac{3}{\text{Cualquier elemento menos 1 y 3 (combinación)}} + \frac{1}{1}\;\frac{1}{7}\;\frac{2}{\text{Cualquier elemento menos 1, 3 y 5 (combinación)}} + \frac{1}{1}\;\frac{1}{9}\;\frac{1}{\text{Elemento 9 (combinación)}}$$

$$\frac{1}{3}\;\frac{1}{3}\;\frac{4}{\text{Cualquier elemento menos el 1 (combinación)}} + \frac{1}{3}\;\frac{1}{5}\;\frac{3}{\text{Cualquier elemento menos 1 y 3 (combinación)}} + \frac{1}{3}\;\frac{1}{7}\;\frac{2}{\text{Cualquier elemento menos 1, 3 y 5 (combinación)}} + \frac{1}{3}\;\frac{1}{9}\;\frac{1}{\text{Elemento 9 (combinación)}}$$

$$\frac{1}{5}\;\frac{1}{5}\;\frac{3}{\text{Cualquier elemento menos 1 y 3 (combinación)}} + \frac{1}{5}\;\frac{1}{7}\;\frac{2}{\text{Cualquier elemento menos 1, 3 y 5 (combinación)}} + \frac{1}{5}\;\frac{1}{9}\;\frac{1}{\text{Elemento 9 (combinación)}}$$

$$\frac{1}{7}\;\frac{1}{7}\;\frac{2}{\text{Cualquier elemento menos 1, 3 y 5 (combinación)}} + \frac{1}{7}\;\frac{1}{9}\;\frac{1}{\text{Elemento 9 (combinación)}}$$

$$\frac{1}{9}\;\frac{1}{9}\;\frac{1}{9}$$

4. **(25pts)** En un grupo hay 3 mujeres y 2 hombres.
   a. (3pts) Describa el espacio muestral *S* para escoger 3 alumnos del total que hay.
   R/. Se debe escoger 3 alumnos de 5 que hay en el grupo; o sea, es una combinación sin repetición, ya que no importa el orden y es sin repetición
   $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6*2} = 10$ agrupaciones distintas
   S = {M1M2M3, M1M2H1, M1M2H2, M1M3H1, M1M3H2, M2M3H1, M2M3H2, M1H1H2, M2H1H2, M3H1H2}

   b. (5pts) Exprese explícitamente los siguientes eventos: *A* = {Al menos hay una mujer en la selección}, *B* = {Hay exactamente dos hombres en la selección}.
   R/. Evento *A*: Se debe escoger 3 alumnos de 5 que hay en el grupo, pero seleccionando al menos 1 mujer; o sea, es una combinación sin repetición (ya que no importa el orden y es sin repetición) en donde hay que seleccionar a 1 mujer y 2 hombres, 2 mujeres y 1 hombre, ó 3 mujeres
   $C_{3,1}C_{2,2} + C_{3,2}C_{2,1} + C_{3,3}C_{2,0} = \binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{3}{2}\binom{2}{1} + \binom{3}{3}\binom{2}{0} = 3*1+3*2+1*1 = 3+6+1 = 10$
   agrupaciones distintas
   A = {M1M2M3, M1M2H1, M1M2H2, M1M3H1, M1M3H2, M2M3H1, M2M3H2, M1H1H2, M2H1H2, M3H1H2}
   Evento *B*: Se debe escoger 3 alumnos de 5 que hay en el grupo, pero seleccionando a los 2 hombres; o sea, es una combinación sin repetición (ya que no importa el orden y es sin repetición) en donde sólo hay que seleccionar a 1 mujer de las 3 que hay
   $C_{3,1}C_{2,2} = \binom{3}{1}\binom{2}{2} = \frac{3!}{1!(3-1)!} * \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{6}{1*2} * \frac{2}{2*1} = 3*1 = 3$ agrupaciones distintas
   B = {M1H1H2, M2H1H2, M3H1H2}

c. (2pts) ¿La pareja de eventos A y B son mutuamente excluyentes? Justifique.
R/. No, ya que $A \cap B \neq \varnothing$. La $A \cap B$ = {M1H1H2, M2H1H2, M3H1H2} = B.

d. (5pts) Encontrar la probabilidad de que en la selección haya una mujer y un hombre, y el tercer alumno puede ser cualquiera que no haya sido elegido (mujer u hombre).
R/. La cantidad de agrupaciones donde haya una mujer y un hombre, y el tercer alumno puede ser algún hombre o una mujer no seleccionados $\Rightarrow$

$n = C_{3,1}C_{2,2} + C_{3,2}C_{2,1} = \binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{3}{2}\binom{2}{1} = 3*1 + 3*2 = 3 + 6 = 9$ agrupaciones distintas que cumplen restricción

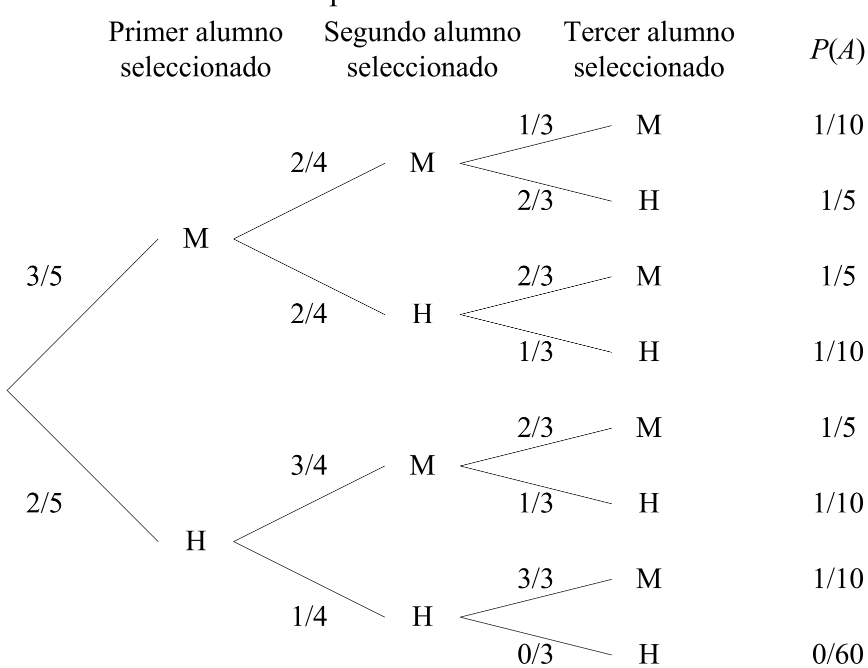
La cantidad total de agrupaciones $\Rightarrow$

$N = C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6*2} = 10$ agrupaciones distintas

Por lo tanto, la probabilidad $\Rightarrow$

$$\frac{n}{N} = \frac{C_{3,1}C_{2,2} + C_{3,2}C_{2,1}}{C_{5,3}} = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{9}{10} = 0.9$$

e. (6pts) Sean los eventos A = {El primer alumno seleccionado es hombre}, B = {El segundo alumno seleccionado es mujer} y C = {El tercer alumno seleccionado es mujer}. Encontrar la probabilidad de cada evento.
R/. Al establecer posiciones de selección (primer alumno) se da importancia al orden, por lo que se tendrán variaciones sin repetición



Evento A: Primer alumno es hombre

$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{2}{5} = 0.4$

Evento B: Segundo alumno es mujer

$n = 3*2 + 2*3 = 6 + 6 = 12$

$N = 5*4 = 20$

$P(B) = \dfrac{n}{N} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

Evento C: Tercer alumno es mujer

$n = 3*2*1 + 3*2*2 + 2*3*2 + 2*1*3 = 6 + 12 + 12 + 6 = 36$

$N = 5*4*3 = 60$

$P(C) = \dfrac{n}{N} = \dfrac{36}{60} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

f. (2pts) Basado en los eventos del ejercicio 4e, ¿los eventos A, B y C son independientes? Justifique.
R/. No, ya que $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) \Rightarrow 1/5 \neq 2/5*3/5*3/5 \Rightarrow 1/5 \neq 18/125$.
La $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) \Rightarrow 1/5 = 2/5*3/4*2/3 \Rightarrow 1/5 = 1/5$

g. (2pts) Encontrar la probabilidad de que el tercer alumno seleccionado sea hombre dado que los dos primeros fueron mujeres.
R/. Evento A: Primer alumno es mujer
Evento B: Segundo alumno es mujer
Evento C: Tercer alumno es hombre

$P(C|A \cap B) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \dfrac{1/5}{3/10} = \dfrac{2}{3}$

5. **(10pts)** Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas. Indique en cada una la ecuación característica, las raíces características y la solución general.

a. (5pts) $5a_{n+1} = -10a_n$, $n \geq 0$, $a_2 = 20$.

$$5a_{n+1} = \quad 10a_n$$
$$5a_{n+1} + 10a_n = 0$$
$$a_n = dr^n$$
$$5dr^{n+1} + 10dr^n = 0$$
$$5dr^n(r + 2) = 0$$
$$EC \rightarrow r + 2 = 0$$
$$RC \rightarrow r = \quad 2, m = 1$$
$$a_n = c_1(\quad 2)^n, n \geq 0$$
$$a_2 = a_0(\quad 2)^2$$
$$20 = 4a_0$$
$$5 = a_0$$
$$SG \rightarrow a_n = 5(\quad 2)^n, n \geq 0$$

b. (5pts) $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$, $\mathrm{n} \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} \quad 9a_n$$
$$a_{n+2} \quad 6a_{n+1} + 9a_n = 0$$
$$a_n = dr^n$$
$$dr^{n+2} \quad 6dr^{n+1} + 9dr^n = 0$$
$$dr^n(r^2 \quad 6r + 9) = 0$$
$$EC \rightarrow r^2 \quad 6r + 9 = 0$$
$$EC \rightarrow (r \quad 3)^2 = 0$$
$$RC \rightarrow r = 3, m = 2$$
$$a_n = c_1(3)^n + c_2(3)^n n, n \geq 0$$
$$a_0 = c_1(3)^0 + c_2(3)^0 0$$
$$1 = c_1$$

$$a_1 = c_1(3)^1 + c_2(3)^1 1$$
$$2 = 1 \quad 3 + 3c_2$$
$$2 \quad 3 = 3c_2$$
$$\frac{1}{3} = c_2$$
$$SG \to a_n = 1(3)^n \quad \frac{1}{3}(3)^n n, n \geq 0$$

6. **(10pts)** Resuelva la siguiente relación de recurrencia no homogénea. Indique la ecuación característica, las raíces características, el $f(n)$, la solución homogénea asociada, la solución particular y la solución general.

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = n + 5, n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 2.$$

$$a_{n+2} \quad 6a_{n+1} + 9a_n = n + 5$$

Solución homogénea asociada a_n^h

$$a_{n+2} \quad 6a_{n+1} + 9a_n = 0$$
$$a_n^h = dr^n$$
$$dr^{n+2} \quad 6dr^{n+1} + 9dr^n = 0$$
$$dr^n(r^2 \quad 6r + 9) = 0$$
$$EC \to r^2 \quad 6r + 9 = 0$$
$$EC \to (r \quad 3)^2 = 0$$
$$RC \to r = 3, m = 2$$
$$SHA \to a_n^h = c_1(3)^n + c_2(3)^n n, n \geq 0$$

Solución particular a_n^p

$$f(n) = n + 5$$
$$a_n^p = A_1 n + A_0$$
$$a_{n+2} \quad 6a_{n+1} + 9a_n = n + 5$$
$$A_1(n+2) + A_0 \quad 6[A_1(n+1) + A_0] + 9(A_1 n + A_0) = n + 5$$
$$A_1 n + 2A_1 + A_0 \quad 6[A_1 n + A_1 + A_0] + 9A_1 n + 9A_0 = n + 5$$
$$A_1 n + 2A_1 + A_0 \quad 6A_1 n \quad 6A_1 \quad 6A_0 + 9A_1 n + 9A_0 = n + 5$$
$$4A_1 n \quad 4A_1 + 4A_0 = n + 5$$
$$4A_1 n = n \qquad 4A_1 + 4A_0 = 5$$
$$4A_1 = 1 \qquad 4\frac{1}{4} + 4A_0 = 5$$
$$A_1 = \frac{1}{4} \qquad 1 + 4A_0 = 5$$
$$A_1 = \frac{1}{4} \quad 4A_0 = 6$$
$$A_1 = \frac{1}{4} \quad A_0 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$SP \to a_n^p = \frac{1}{4}n + \frac{3}{2}, n \geq 0$$

Solución general a_n

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$
$$a_n = c_1(3)^n + c_2(3)^n n + \frac{1}{4}n + \frac{3}{2}$$
$$a_0 = c_1(3)^0 + c_2(3)^0 0 + \frac{1}{4} \quad 0 + \frac{3}{2}$$
$$1 = c_1 + \frac{3}{2}$$
$$1 \quad \frac{3}{2} = c_1$$
$$\frac{1}{2} = c_1$$

$$a_1 = c_1(3)^1 + c_2(3)^1 1 + \frac{1}{4} \quad 1 + \frac{3}{2}$$

$$2 = \quad \frac{1}{2} \quad 3 + 3c_2 + \frac{7}{4}$$

$$2 = 3c_2 + \frac{1}{4}$$

$$2 \quad \frac{1}{4} = 3c_2$$

$$\frac{7}{4} = 3c_2$$

$$\frac{7}{12} = c_2$$

$$a_n = \quad \frac{1}{2}(3)^n + \frac{7}{12}(3)^n n + \frac{1}{4}n + \frac{3}{2}, n \geq 0$$

7. **(10pts)** Resuelva la siguiente relación de recurrencia no lineal y no homogénea. Indique la ecuación característica, las raíces características, la solución homogénea asociada, la solución particular y la solución general.

$$a_{n+2}{}^2 - 5a_{n+1}{}^2 + 4a_n{}^2 = 2,\ n \geq 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 4.$$

$$a_{n+2}{}^2 - 5a_{n+1}{}^2 + 4a_n{}^2 = 2, a_0 = 1, a_1 = 4$$

$$b_n = a_n{}^2$$

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 2, b_0 = 1, b_1 = 16$$

Solución homogénea asociada b_n^h

$$b_{n+2} \quad 5b_{n+1} + 4a_n = 0$$

$$b_n^h = dr^n$$

$$dr^{n+2} \quad 5dr^{n+1} + 4dr^n = 0$$

$$dr^n(r^2 \quad 5r + 4) = 0$$

$$EC \to r^2 \quad 5r + 4 = 0$$

$$EC \to (r \quad 1)(r \quad 4) = 0$$

$$RC \to r_1 = 1, m = 1$$

$$RC \to r_2 = 4, m = 1$$

$$SHA \to b_n^h = c_1(1)^n + c_2(4)^n, n \geq 0$$

Solución particular b_n^p

$$f(n) = 2$$

$$b_n^p = A(1)^n n$$

$$b_{n+2} \quad 5b_{n+1} + 4a_n = 2$$

$$A(n+2) \quad 5A(n+1) + 4An = 2$$

$$An + 2A \quad 5An \quad 5A + 4An = 2$$

$$3A = 2$$

$$A = \quad \frac{2}{3}$$

$$SP \to b_n^p = \quad \frac{2}{3}n, n \geq 0$$

Solución general b_n

$$b_n = b_n^h + b_n^p$$

$$b_n = c_1(1)^n + c_2(4)^n \quad \frac{2}{3}n$$

$$b_0 = c_1(1)^0 + c_2(4)^0 \quad \frac{2}{3} \quad 0$$

$$1 = c_1 + c_2$$

$$b_1 = c_1(1)^1 + c_2(4)^1 - \frac{2}{3} - 1$$
$$16 = c_1 + 4c_2 - \frac{2}{3}$$
$$\frac{50}{3} = c_1 + 4c_2$$
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 4c_2 = \frac{50}{3} \end{cases}$$
$$c_1 = -\frac{38}{9}, c_2 = \frac{47}{9}$$
$$SG \to b_n = -\frac{38}{9}(1)^n + \frac{47}{9}(4)^n - \frac{2}{3}n, n \geq 0$$
$$SG \to a_n = \sqrt{b_n}$$
$$SG \to a_n = \sqrt{-\frac{38}{9}(1)^n + \frac{47}{9}(4)^n - \frac{2}{3}n}, n \geq 0$$

8. **(20pts)** Halle una ecuación de recurrencia que genere la siguiente sucesión: {1,2,5,12,29,70,169,…} y resuelva dicha ecuación, obteniendo en función de *n*, el termino general a_n de la sucesión.

R/. a_n cumple la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, con condiciones iniciales:

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 2$

Solucionamos la relación de recurrencia:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$
$$a_n = dr^n$$
$$dr^n - 2dr^{n-1} - dr^{n-1} = 0$$
$$dr^{n-1}(r^2 - 2r - 1) = 0$$
$$EC \to r^2 - 2r - 1 = 0$$
$$RC \to r_1 = 1 + \sqrt{2}, m = 1$$
$$RC \to r_2 = 1 - \sqrt{2}, m = 1$$
$$a_n = c_1\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + c_2\left(1 - \sqrt{2}\right)^n, n \geq 0$$
$$a_0 = c_1\left(1 + \sqrt{2}\right)^0 + c_2\left(1 - \sqrt{2}\right)^0$$
$$1 = c_1 + c_2$$
$$a_1 = c_1\left(1 + \sqrt{2}\right)^1 + c_2\left(1 - \sqrt{2}\right)^1$$
$$2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)c_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right)c_2$$
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \left(1 + \sqrt{2}\right)c_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right)c_2 = 2 \end{cases}$$
$$c_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, c_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$
$$SG \to a_n = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)^n, n \geq 0$$