Relaciones de Recurrencia Método de Sustitución y Generalización

UCR – ECCI

CI-0111 Estructuras Discretas

Prof. Kryscia Daviana Ramírez Benavides

Algoritmos

- Un algoritmo es **recursivo** si soluciona un problema reduciéndolo a una instancia del mismo problema con la entrada más pequeña.
  - Estos algoritmos realizan llamadas recursivas para llegar al resultado.
  - Aquel algoritmo que se llama asimismo *n* veces y tiene un valor base (inicial, frontera, límite).
- Un algoritmo es **iterativo** si soluciona un problema a través de una iteración mediante un ciclo definido o indefinido.
  - Estos algoritmos son muy útiles al momento de realizar tareas repetitivas (como recorrer un arreglo de datos).
  - Se caracterizan por ejecutarse mediante ciclos para llegar al resultado.

Recursión e Iteración

ALGORITHM 7 A Recursive Algorithm for Fibonacci Numbers.

procedure *fibonacci*(n: nonnegative integer)
if $n = 0$ **then return** 0
else if $n = 1$ **then return** 1
else return *fibonacci*($n - 1$) + *fibonacci*($n - 2$)
{output is *fibonacci*(n)}

ALGORITHM 8 An Iterative Algorithm for Computing Fibonacci Numbers.

```
procedure iterative fibonacci(n: nonnegative integer)
if n = 0 then return 0
else
    x := 0
    y := 1
    for i := 1 to n − 1
        z := x + y
        x := y
        y := z
    return y
{output is the nth Fibonacci number}
```

Recursión e Iteración

<u>ALGORITMO RECURSIVO – CÁLCULO DEL FACTORIAL DE UN NÚMERO *N*</u>

procedure ***factorial*(*n*: integer no negativo)**
if *n* = 0 **then return** 0
else if *n* = 1 **then return** 1
else return *factorial*(*n* – 1)
{output is *factorial*(*n*)}

<u>ALGORITMO ITERACTIVO – CÁLCULO DEL FACTORIAL DE UN NÚMERO *N*</u>

```
procedure factorial(n: integer no negativo)
f := 1
if n >= 0 then
        for i := 1 to n
                f := i * f
        return y
else
        return 0
{output is factorial(n)}
```

Series

- Serie Aritmética
- $a_{n+1} - a_n = a_0 + (n-1)d$
  - Si la diferencia d en una progresión aritmética:
    - $d > 0 \rightarrow$ progresión creciente, cada término es mayor que el anterior
    - $d = 0 \rightarrow$ progresión constante, todos los términos son iguales
    - $d < 0 \rightarrow$ progresión decreciente, cada término es menor que el anterior
- Serie Geométrica
- $a + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r}$
  - $r \neq -1,0,1; a \neq 0$

Series

- $\sum_{k=0}^{n-1} kc^k = \frac{(n-1)c^{n+1} - nc^n + c}{(c-1)^2}$
  - $c \rightarrow$ constante

Series

1. $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

Método de Sustitución y Generalización

- El método más simple y sencillo:
  - Se va evaluando la recurrencia para ciertos valores.
  - Se deduce, a partir del comportamiento mostrado, una ecuación que represente el comportamiento de la recurrencia.
  - Se generaliza la solución, encontrando un patrón.
  - Se demuestra que la ecuación, efectivamente, resuelve a la recurrencia.

Método de Sustitución y Generalización

- Considere la siguiente relación de recurrencia (RR):
  - $$a(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3a\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1 \end{cases}$$
- Solución:
  - Construir una tabla con los valores que toma la RR para diferentes valores de n.
  - TIP: Notar que la RR solo queda definida para n = potencias de 2, es decir, para $n = 2^k$, donde $k \epsilon \mathbb{Z}^+$.

Método de Sustitución y Generalización

n	$a(n)$
2^1	$3a\left(\frac{2}{2}\right)+2^1=3a(1)+2^1=3\times 1+2^1$
2^2	$3a\left(\frac{4}{2}\right)+2^2=3a(2)+2^2=3(3\times 1+2^1)+2^2=3^2\times 1+3^1\times 2+2^2$
2^3	$3a\left(\frac{8}{2}\right)+2^3=3a(4)+2^3=3\left(3^2\times 1+3^1\times 2+2^2\right)+2^3$ $=3^3\times 1+3^2\times 2+3^1\times 2^2+2^3$
2^4	$3a\left(\frac{16}{2}\right)+2^4=3a(8)+2^4=3\left(3^3\times 1+3^2\times 2+3^1\times 2^2+2^3\right)+2^4$ $=3^4\times 1+3^3\times 2+3^2\times 2^2+3^1\times 2^3+2^4$

$$a\left(2^k\right)=3^k2^0+3^{k-1}2^1+\cdots+3^12^{k-1}+3^02^k=\sum_{i=0}^{k}3^{k-i}2^i$$

Método de Sustitución y Generalización

- En la expresión anterior, se puede notar que *a* queda en términos de una sumatoria, por lo que se requiere manipulación algebraica para dejarla en términos exclusivamente del argumento:

$$a(2^k) = \sum_{i=0}^{k} 3^{k-i} 2^i = 3^k \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 3^{k+1} - 2^{k+1}$$

- Para resolver la fórmula se utiliza la serie geométrica
  - Para $r \neq 1$, la suma de los primeros n términos de una serie geométrica es:
  - $a + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r}$

Método de Sustitución y Generalización

- Con $a = 1$ y $r = 2/3$:

$$a(2^k) = 3^k \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 3^k \left(\frac{1 - \left({}^2/_3\right)^{k+1}}{1 - {}^2/_3}\right) = 3^k \left(\frac{\frac{3^{k+1} - 2^{k+1}}{3^{k+1}}}{{}^1/_3}\right)$$

$$= 3^{k+1} \left(\frac{3^{k+1} - 2^{k+1}}{3^{k+1}}\right) = 3^{k+1} - 2^{k+1}$$

- Con la solución se generaliza:

$$a(n) = 3^{n+1} - 2^{n+1}, n \geq 0$$

Ejemplo – Selección Recursivo

- Para ordenar una lista L de tamaño n
  - Si $n > 1$
    - **Paso 1.** Buscar el menor elemento de L
    - **Paso 2.** Intercambiar el menor elemento con el primer elemento de L
    - **Paso 3.** Ordenar usando Selección Recursivo la sub-lista de tamaño $n – 1$ que resulta de ignorar el primer elemento de L

Ejemplo – Selección Recursivo Cantidad de Intercambios

- Cantidad de intercambios que se hacen en el algoritmo:
  - $f(1) = 0$
  - $f(n) = 1 + f(n - 1),\ n \geq 1$

Ejemplo – Selección Recursivo Cantidad de Intercambios

- Usando sustitución y generalización:
  - $f(n) = 1 + f(n-1)$
  - $f(n) = 1 + 1 + f(n-2) = 2 + f(n-2)$
  - $f(n) = 1 + 1 + 1 + f(n-3) = 3 + f(n-3)$
  - …
  - $f(n) = i + f(n-i)$
  - Usando la condición inicial: $n - i = 1 \rightarrow i = n - 1$
  - Por lo tanto: $f(n) = n - 1 + f(1) = n - 1 + 0 = n - 1$
  - $f(n) = n - 1$

Ejemplo – Selección Recursivo Cantidad de Comparaciones

- Cantidad de comparaciones que se hacen en el algoritmo:
  - $f(1) = 0$
  - $f(n) = n - 1 + f(n - 1),\ n \geq 1$

Ejemplo – Selección Recursivo Cantidad de Comparaciones

- Usando sustitución y generalización:
  - $f(n) = n - 1 + f(n - 1)$
  - $f(n) = n - 1 + n - 1 - 1 + f(n - 2) = 2n - 3 + f(n - 2)$
  - $f(n) = n - 1 + n - 1 + n - 1 - 1 - 1 + f(n - 3) = 3n - 6 + f(n - 3)$
  - …
  - $f(n) = in - i(i + 1)/2 + f(n - i)$
  - Usando la condición inicial: $n - i = 1 \rightarrow i = n - 1$
  - Por lo tanto: $f(n) = (n - 1)n - (n - 1)n/2 + f(1) = (n - 1)n - (n - 1)n/2 + 0 = (n - 1)n/2$
  - $f(n) = (n - 1)n/2$

Ejemplo #1

- $f(n) = \begin{cases} 3 & n = 0 \\ n + 5f(n-1) & n > 0 \end{cases}$

$$a_n = \frac{53 * 5^n}{16} - \frac{n}{4} - \frac{5}{16}, n \geq 0$$

Ejemplo #1

Valor	Resultado
$i = 1$	$f(n) = n + 5f(n-1)$
$i = 2$	$f(n) = n + 5[n - 1 + 5f(n-2)] = n + 5n - 5 + 5^2 f(n-2) = 6n - 5 + 5^2 f(n-2)$
$i = 3$	$f(n) = n + 5\left[n - 1 + 5\left(n - 1 - 1 + 5f(n-3)\right)\right]$ $= n + 5n - 5 + 5^2 n - 5^2 - 5^2 + 5^3 f(n-3) = 31n - 55 + 5^3 f(n-3)$
…	…
$n - i = 0$ $n = i$	$f(n) = n \sum_{k=0}^{i-1} 5^k - \sum_{k=0}^{i-1} k5^k + 5^i f(n-i)$ $f(n) = -\frac{n(1-5^n)}{4} - \left(\frac{n5^n}{4} - \frac{5 * 5^n}{16} + \frac{5}{16}\right) + 5^n f(0)$ $= -\frac{n(1-5^n)}{4} - \frac{n5^n}{4} + \frac{5 * 5^n}{16} - \frac{5}{16} + 5^n * 3 = -\frac{n}{4} + \frac{n5^n}{4} - \frac{n5^n}{4} + \frac{5 * 5^n}{16} - \frac{5}{16} + \frac{48 * 5^n}{16}$ $= -\frac{n}{4} + \frac{(5+48) * 5^n}{16} - \frac{5}{16} = -\frac{n}{4} + \frac{53 * 5^n}{16} - \frac{5}{16}$

Ejemplo #2

- $f(n) = \begin{cases} 3 & n = 0 \\ 8 + 5f(n-1) & n > 0 \end{cases}$

$$a_n = 5^{n+1} - 2, n \geq 0$$

Ejemplo #2

Valor	Resultado
$i = 1$	$f(n) = 8 + 5f(n-1)$
$i = 2$	$f(n) = 8 + 5[8 + 5f(n-2)] = 8 + 5 * 8 + 5^2 f(n-2)$ $= 48 + 5^2 f(n-2)$
$i = 3$	$f(n) = 8 + 5\big[8 + 5\big(8 + 5f(n-3)\big)\big]$ $= 8 + 5 * 8 + 5^2 * 8 + 5^3 f(n-3) = 248 + 5^3 f(n-3)$
…	…
$n - i = 0$ $n = i$	$f(n) = 8\sum_{k=0}^{i-1} 5^k + 5^i f(n-i)$ $f(n) = -\frac{8(1-5^n)}{4} + 5^n f(0) = -\frac{8}{4} + \frac{8 * 5^n}{4} + 3 * 5^n$ $= -2 + \frac{(8+12) * 5^n}{4} = -2 + \frac{20 * 5^n}{4} = -2 + 5 * 5^n = 5^{n+1} - 2$

Referencias Bibliográficas

- Jonnsonbaugh, Richard. “Matemáticas Discretas”. Prentice Hall, México. Sexta Edición, 2005.
- Grimaldi, Ralph P. “Matemática Discreta y Combinatoria”. Addison Wesley Longman de México, S.A. Tercera Edición, 1998.