Matemática Discreta I
Tema 5 - Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 2 \\ a_0 = 6, a_1 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}, n \geq 2 \\ a_0 = 2, a_1 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2 \\ a_0 = 4, a_1 = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n, n \geq 0 \\ a_0 = 2, a_1 = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, n \geq 3 \\ a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}$

Solución. a) La ecuación característica es $x^2 = 4x - 4$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \Leftrightarrow x = 2$ (raíz doble)
La solución general es $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 = A = 6 \\ a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 = 2A + 2B = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = -2 \end{cases}$$
Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = 6 \cdot 2^n - 2 \cdot n \cdot 2^n$.
b) La ecuación característica es $x^2 = 7x - 10$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 5, x = 2$
La solución general es $a_n = A \cdot 5^n + B \cdot 2^n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A \cdot 5^0 + B \cdot 2^0 = A + B = 2 \\ a_1 = A \cdot 5^1 + B \cdot 2^1 = 5A + 2B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \end{cases}$$
Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = (-1) \cdot 5^n + 3 \cdot 2^n = -5^n + 3 \cdot 2^n$.
c) La ecuación característica es $x^2 = 2x - 1$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Leftrightarrow x = 1$ (raíz doble)
La solución general es $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n = A + B \cdot n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A + B \cdot 0 = A = 4 \\ a_1 = A + B \cdot 1 = A + B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$
Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = 4 + (-3) \cdot n$.
d) La ecuación característica es $x^2 = -4x + 5$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow x = 1, x = -5$
La solución general es $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot (-5)^n = A + B \cdot (-5)^n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A + B \cdot (-5)^0 = A + B = 2 \\ a_1 = A + B \cdot (-5)^1 = A - 5B = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases}$$
Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = 3 + (-1) \cdot (-5)^n = 3 - \cdot (-5)^n$.
e) La ecuación característica es $x^3 = 6x^2 - 11x + 6$.
Las raíces características son las raíces de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2, x = 3$
La solución general es $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n + B \cdot 3^n = A + B \cdot 2^n + C \cdot 3^n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A + B \cdot 2^0 + C \cdot 3^0 = A + B + C = 2 \\ a_1 = A + B \cdot 2^1 + C \cdot 3^1 = A + 2B + 3C = 5 \\ a_2 = A + B \cdot 2^2 + C \cdot 3^2 = A + 4B + 9C = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$$
Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = 1 + (-1) \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.
f) La ecuación característica es $x^2 = 5x - 6$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 3, x = 2$
La solución general es $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$.

Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A + B = 1 \\ a_1 = A \cdot 3 + B \cdot 2 = 3A + 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -2 \\ B = 3 \end{array}\right.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = (-2) \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n = -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$.

Ejercicio 2. Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0, 1\}$, que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

Solución. Las palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0, 1\}$ que no tienen dos ceros consecutivos, se dividen en dos grupos: las que empiezan por 1 y las que empiezan por 0.
Las que empiezan por 1, a continuación del 1 tienen una palabra de longitud $n-1$ sin dos ceros consecutivos.
Las que empiezan por 0, a continuación de éste han de llevar un 1, y a continuación del 1 contienen tienen una palabra de longitud $n - 2$ sin dos ceros consecutivos.
Recíprocamente, si a una palabra de longitud $n - 1$ sin dos ceros consecutivos le añadimos un 1 delante obtenemos una palabra de longitud n sin dos ceros consecutivos, y si a una palabra de longitud $n - 2$ sin dos ceros consecutivos, le añadimos delante el bloque 01 obtenemos una palabra de longitud n sin dos ceros consecutivos.
Así, a_n cumplirá la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
Como condiciones iniciales tenemos

- $a_0 = 1$ (existe una única palabra de longitud 0, la palabra vacía, que no tiene dos ceros consecutivos),
- $a_1 = 2$ (existen dos palabra de longitud 1, las palabras 0 y 1, que no tienen dos ceros consecutivos),
- $a_2 = 3$ (existe dos palabras de longitud 2 sin dos ceros consecutivos, las palabras 01, 10, 11).

No sería necesario calcular a_2 pero dado que a_0 es discutible, nos sirve para comprobar que $a_2 = a_1 + a_0$ y por tanto a_0 es coherente con la relación de recurrencia.
Para resolverla seguimos los pasos habituales:
La ecuación característica es $x^2 = x + 1$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
La solución general es $a_n = A \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A + B = 1 \\ a_1 = A \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = 1 - A \\ A \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-A) \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = 1 - A \\ A \cdot \sqrt{5} = 2 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = 1 - A \\ A \cdot \sqrt{5} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ B = 1 - \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = \left(\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Ejercicio 3. Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

Solución. Hay dos maneras de empezar a subir los n escalones: subiendo un peldaño o subiendo dos peldaños en el primer paso.
Si empezamos subiendo un peldaño, quedarán $n - 1$ peldaños pos subir, subiendo uno o dos peldaños en cada paso.
Si empezamos subiendo dos peldaños, quedarán $n - 2$ peldaños pos subir, subiendo uno o dos peldaños en cada paso.
Así, a_n cumplirá la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
Como condiciones iniciales tenemos

- $a_0 = 1$ (existe una única manera de subir 0 peldaños, no moviéndose),
- $a_1 = 1$ (existe una única manera de subir 1 peldaño),
- $a_2 = 2$ (existen dos maneras de subir dos peldaños, dando dos pasos de un peldaño o dando un paso de dos peldaños).

Calculamos a_2 para verificar que $a_2 = a_1 + a_0$ y por tanto a_0 es coherente con la relación de recurrencia.
Para resolverla seguimos los pasos habituales:
La ecuación característica es $x^2 = x + 1$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
La solución general es $a_n = A \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A + B = 1 \\ a_1 = A \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = 1 - A \\ A \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-A) \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = 1 - A \\ A \cdot \sqrt{5} = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = 1 - A \\ A \cdot \sqrt{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \\ B = 1 - \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Ejercicio 4. Sean n rectas trazadas en el plano de manera que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes. Para cada $n \geq 0$, sea a_n el número de regiones en que las n rectas dividen al plano y sea b_n el numero de regiones infinitas a) Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela. b) Encuentra una relación de recurrencia para calcular b_n y resuélvela.

Solución. a) Observamos que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $\ldots$.
En general, si tenemos $n-1$ rectas, al añadir una recta más hacemos n nuevas regiones, es decir, $a_n = a_{n-1} + n$.
Para resolver la relación de recurrencia, seguimos los pasos habituales.
La recurrencia lineal homogénea asociada es $a_n = a_{n-1}$.
La ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 1$.
La única raíz característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 1$.
La solución general de la recurrencia lineal homogénea asociada es $a'_n = A \cdot 1^n = A$.
Una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será de la forma $a''_n = (Kn+L) \cdot n = Kn^2 + Ln$.
Calculamos K y L imponiendo que a''_n cumpla la recurrencia lineal no homogénea, es decir:

$$a''_n = a''_{n-1} + n \Leftrightarrow Kn^2 + Ln = K(n-1)^2 + L(n-1) + n.$$

Dando valores:

$$\left\{\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow K \cdot 0^2 + L \cdot 0 = K \cdot (-1)^2 + L \cdot (-1) + 0 \Rightarrow K - L = 0 \\ n = 1 \Rightarrow K \cdot 1^2 + L \cdot 1 = K \cdot 0^2 + L \cdot 0 + 1 \Rightarrow K + L = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow K = L = \frac{1}{2}.$$

Así, una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será $a''_n = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n$.

La solución general de la recurrencia lineal no homogénea es $a_n = a'_n + a''_n = A + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n$.
Para calcular la solución particular de la recurrencia lineal no homogénea aplicamos la condición inicial $a_1 = 2$:

$$a_1 = A + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = A + 1 = 2 \Rightarrow A = 1.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea es $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.
b) Observamos que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, ... En general, si tenemos $n-1$ rectas, al añadir una recta más hacemos 2 nuevas regiones, es decir, $a_n = a_{n-1} + 2$.
Como $a_n = 2n$ cumple la relación de recurrencia (pues $a_n = 2n = 2(n-1) + 2 = a_{n-1} + 2$) y la condición inicial (pues $a_1 = 2 \cdot 1 = 2$), se tiene que $a_n = 2n$ es la solución.

Ejercicio 5. Problema de las Torres de Hanoi (Édouard Lucas): Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

Solución. Para mover n discos basta mover $n-1$ discos a una estaca libre, mover el disco mayor a la otra estaca libre y mover de nuevo los $n-1$ discos sobre el disco mayor.
Por tanto, a_n cumple la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = 2a_{n-1} + 1$.
Para resolver la relación de recurrencia, seguimos los pasos habituales.
La recurrencia lineal homogénea asociada es $a_n = 2a_{n-1}$.
La ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 2$.
La única raíz característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 2$.
La solución general de la recurrencia lineal homogénea asociada es $a'_n = A \cdot 2^n$.
Una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será de la forma $a''_n = K$.
Calculamos K imponiendo que a''_n cumpla la recurrencia lineal no homogénea, es decir:

$$a''_n = 2a''_{n-1} + 1 \Leftrightarrow K = 2K + 1 \Leftrightarrow K = -1.$$

Así, una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será $a''_n = -1$.
La solución general de la recurrencia lineal no homogénea es $a_n = a'_n + a''_n = A \cdot 2^n - 1$.
Para calcular la solución particular de la recurrencia lineal no homogénea aplicamos la condición inicial $a_1 = 1$ (para mover una torre de un solo disco basta un movimiento):

$$a_1 = A \cdot 2^1 - 1 = 1 \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea es $a_n = 2^n - 1$.

Ejercicio 6. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia no homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1, n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2, n \geq 1 \\ a_0 = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 7^n 5, n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3^n 5, n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2, n \geq 3 \\ a_0 = 11, a_1 = 1, a_2 = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n, n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 3 \end{cases}$

Solución. a) La recurrencia lineal homogénea asociada es $a_n = a_{n-1}$.
La ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 1$.
La única raíz característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 1$.
La solución general de la recurrencia lineal homogénea asociada es $a'_n = A \cdot 1^n = A$.
Una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será de la forma $a''_n = (Kn+L) \cdot n = Kn^2 + Ln$.
Calculamos K imponiendo que a''_n cumpla la recurrencia lineal no homogénea, es decir:

$$a''_n = a''_{n-1} + 2n - 1 \Leftrightarrow Kn^2 + Ln = K(n-1)^2 + L(n-1) + 2n - 1.$$

Dando valores:

$$\left.\begin{cases} n = 0 \Rightarrow K \cdot 0^2 + L \cdot 0 = K \cdot (-1)^2 + L \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow K - L = 1 \\ n = 1 \Rightarrow K \cdot 1^2 + L \cdot 1 = K \cdot 0^2 + L \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \Rightarrow K + L = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ L = 0 \end{cases}$$

Así, una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será $a''_n = n^2$.
La solución general de la recurrencia lineal no homogénea es $a_n = a'_n + a''_n = A + n^2$.
Calculamos la solución de la recurrencia lineal no homogénea que cumple la condición inicial:

$$a_1 = A + 1^2 = 1 \Rightarrow A = 0.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea es $a_n = n^2$.
b) La recurrencia lineal homogénea asociada es $a_n = a_{n-1}$.
La ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 1$.
La única raíz característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 1$.
La solución general de la recurrencia lineal homogénea asociada es $a'_n = A \cdot 1^n = A$.
Una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será de la forma $a''_n = Kn^3 + Ln^2 + Mn$.
Calculamos K imponiendo que a''_n cumpla la recurrencia lineal no homogénea, es decir:

$$a''_n = a''_{n-1} + 2n - 1 \Leftrightarrow Kn^3 + Ln^2 + Mn = K(n-1)^3 + L(n-1)^2 + M(n-1) + 3n^2.$$

Dando valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow K \cdot 0^3 + L \cdot 0^2 + M \cdot 0 = K \cdot (-1)^3 + L \cdot (-1)^2 + M \cdot (-1) + 3 \cdot 0^2 \\ n = 1 \Rightarrow K \cdot 1^3 + L \cdot 1^2 + M \cdot 1 = K \cdot 0 + L \cdot 0^2 + M \cdot 0 + 3 \cdot 1^2 \\ n = 2 \Rightarrow K \cdot 2^3 + L \cdot 2^2 + M \cdot 2 = K \cdot 1 + L \cdot 1^2 + M \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K - L + M = 0 \\ K + L + M = 3 \\ 7K + 3L + M = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K = 1 \\ L = \dfrac{3}{2} \\ M = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Así, una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será $a''_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.
La solución general de la recurrencia lineal no homogénea es $a_n = a'_n + a''_n = A + n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.
Calculamos la solución de la recurrencia lineal no homogénea que cumple la condición inicial:

$$a_0 = A = 7.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea es $a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 7$.
c) La recurrencia lineal homogénea asociada es $a_n = 3a_{n-1}$.
La ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 3$.
La única raíz característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 3$.
La solución general de la recurrencia lineal homogénea asociada es $a'_n = A3^n$.
Una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será de la forma $a''_n = K7^n$.
Calculamos K imponiendo que a''_n cumpla la recurrencia lineal no homogénea, es decir:

$$a''_n = 3a''_{n-1} + 7^n 5 \Leftrightarrow K7^n = 3K7^{n-1} + 7^n 5.$$

Dando valores:
$n = 1 \Rightarrow 7K = 3K + 35 \Rightarrow 4K = 35 \Rightarrow k = \frac{35}{4}$.
Así, una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será $a''_n = \frac{35}{4}7^n$.
La solución general de la recurrencia lineal no homogénea es $a_n = a'_n + a''_n = A3^n + \frac{35}{4}7^n$.
Calculamos la solución de la recurrencia lineal no homogénea que cumple la condición inicial:

$$a_0 = A3^0 + \frac{35}{4}7^0 = A + \frac{35}{4} = 2 \Rightarrow A = -\frac{27}{4}.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea es $a_n = -\frac{27}{4}3^n + \frac{35}{4}7^n$.

d) La recurrencia lineal homogénea asociada es $a_n = 3a_{n-1}$.
La ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 3$.
La única raíz característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x = 3$.
La solución general de la recurrencia lineal homogénea asociada es $a'_n = A3^n$.
Una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será de la forma $a''_n = Kn3^n$.
Calculamos K imponiendo que a''_n cumpla la recurrencia lineal no homogénea, es decir:

$$a''_n = 3a''_{n-1} + 3^n 5 \Leftrightarrow Kn3^n = 3K(n-1)3^{n-1} + 3^n 5.$$

Dando valores:
$n = 1 \Rightarrow 3K = 15 \Rightarrow K = 5$.
Así, una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será $a''_n = 5n3^n$.
La solución general de la recurrencia lineal no homogénea es $a_n = a'_n + a''_n = A3^n + 5n3^n$.
Calculamos la solución de la recurrencia lineal no homogénea que cumple la condición inicial:

$$a_0 = A = 2.$$

Así, la solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea es $a_n = 2 \cdot 3^n + 5n3^n = (2+5n)\,3^n$.
e) La recurrencia lineal homogénea asociada es $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$.
La ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x^3 = 3x^2 - 4$.
Las raíces características de la recurrencia lineal homogénea asociada son $x = -1$, $x = 2$ (raíz doble).
La solución general de la recurrencia lineal homogénea asociada es $a'_n = A(-1)^n + B2^n + Cn2^n$.
Una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será de la forma $a''_n = Kn^2 + Ln + M$.
Calculamos K imponiendo que a''_n cumpla la recurrencia lineal no homogénea, es decir:

$$a''_n = 3a''_{n-1} - 4a''_{n-3} + n^2 \Leftrightarrow Kn^2 + Ln + M = 3(K(n-1)^2 + L(n-1) + M) - 4(K(n-3)^2 + L(n-3) + M) + n^2.$$

Dando valores:

$$\left\{\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow M = 3(K - L + M) - 4(9K - 3L + M) \\ n = 1 \Rightarrow K + L + M = 3M - 4(4K - 2L + M) + 1 \\ n = 3 \Rightarrow 9K + 3L + M = 3(4K + 2L + M) - 4M + 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 33K - 9L + 2M = 0 \\ 17K - 7L + 2M = 1 \\ -3K - 3L + 2M = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K = \dfrac{1}{2} \\ L = \dfrac{9}{2} \\ M = 12 \end{array}\right.$$

Así, una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será $a''_n = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{9}{2}n + 12$.
La solución general de la recurrencia lineal no homogénea es $a_n = a'_n + a''_n = A(-1)^n + B2^n + Cn2^n + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{9}{2}n + 12$.
Calculamos la solución de la recurrencia lineal no homogénea que cumple las condiciones iniciales:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = A + B + C + 12 = 11 \\ a_1 = -A + 2B + 2C + 17 = 1 \\ a_2 = A + 4B + 8C + 23 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A + B + 1 = 0 \\ -A + 2B + 2C + 16 = 0 \\ A + 4B + 8C + 24 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K = 4 \\ L = -5 \\ M = -1 \end{array}\right.$$

Así, la solución es $a_n = 4 \cdot (-1)^n - 5 \cdot 2^n - n \cdot 2^n + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{9}{2}n + 12$.
f) La recurrencia lineal homogénea asociada es $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$.
La ecuación característica de la recurrencia lineal homogénea asociada es $x^2 = 4x - 4$.
Las raíces características de la recurrencia lineal homogénea asociada son $x = 2$ (raíz doble).
La solución general de la recurrencia lineal homogénea asociada es $a'_n = A2^n + Bn2^n$.
Una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será de la forma $a''_n = Kn + L$.
Calculamos K imponiendo que a''_n cumpla la recurrencia lineal no homogénea, es decir:

$$a''_n = 4a''_{n-1} - 4a''_{n-2} + n \Leftrightarrow Kn + L = 4(K(n-1) + L) - 4(K(n-2) + L) + n.$$

Dando valores:

$$\left\{\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow L = 4(-K + L) - 4(-2K + L) \\ n = 1 \Rightarrow K + L = 4L - 4(-K + L) + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4K - L = 0 \\ 3K - L + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K = 1 \\ L = 4 \end{array}\right.$$

Así, una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea será $a''_n = n + 4$.
La solución general de la recurrencia lineal no homogénea es $a_n = a'_n + a''_n = A2^n + Bn2^n + n + 4$.
Calculamos la solución de la recurrencia lineal no homogénea que cumple las condiciones iniciales:
$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = A + 4 = 1 \\ a_1 = 2A + 2B + 5 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + 3 = 0 \\ A + B + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -3 \\ B = 2 \end{array} \right.$
Así, la solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea es $a_n = -3 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n + n + 4$.

Ejercicio 7. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el conjunto de sucesiones de longitud n, formadas con las letras de M, en las que todas las cadenas de As son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

Solución. Las sucesiones de longitud n formadas con las letras $\{A, B, C\}$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par, se dividen en tres grupos: las que empiezan por A, las que empiezan or B y las que empiezan por C.
Las que empiezan por A, a continuación de la A han de tener otra A y a continuación una sucesion de longitud $n - 2$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par.
Las que empiezan por B o C, a continuación han de llevar una sucesion de longitud $n - 1$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par..
Recíprocamente, si a una palabra de longitud $n - 2$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par le añadimos AA delante obtenemos una sucesión de longitud n en las que todas las cadenas de As son de longitud par, y si a una palabra de longitud $n - 1$ en las que todas las cadenas de As son de longitud par, le añadimos delante B o C obtenemos una sucesión de longitud n en las que todas las cadenas de As son de longitud par.
Así, a_n cumplirá la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.
Como condiciones iniciales tenemos

- $a_0 = 1$ (existe una única sucesión de longitud 0, la palabra vacía, en las que todas las cadenas de As son de longitud par),
- $a_1 = 2$ (existen 2 sucesiones de longitud 1, las sucesiones B y C, en las que todas las cadenas de As son de longitud par),
- $a_2 = 5$ (existen 5 sucesiones de longitud 2 en las que todas las cadenas de As son de longitud par, las sucesiones AA, BB, BC, CB, CC).

No sería necesario calcular a_2 pero dado que a_0 es discutible, nos sirve para comprobar que $a_2 = 2a_1 + a_0$ y por tanto a_0 es coherente con la relación de recurrencia.
Para resolverla seguimos los pasos habituales:
La ecuación característica es $x^2 = 2x + 1$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.
La solución general es $a_n = A \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)^n + B \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:
$$\left. \begin{array}{l} a_0 = A + B = 1 \\ a_1 = A \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) + B \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 1 - A \\ A \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) + (1 - A) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 1 - A \\ 2 \cdot A \cdot \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ B = 1 - \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{array} \right.$$
Así, la solución de la relación de recurrencia es $a_n = \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$.

Ejercicio 8. Halla una ecuación de recurrencia que genere la siguiente sucesión: $\{1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots\}$ y resuelve dicha ecuación, obteniendo en función de n, el termino general a_n de la sucesión.

Solución. a_n cumple la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ con condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Por el ejercicio anterior la solución es $a_n = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n$.

Ejercicio 9. Se tiene una cantidad ilimitada de cubos de lado 1, 2 y 4, y se quiere construir una torre de base 4 x 4 apilando cubos, estando formada cada capa por cubos del mismo tamaño. Sea T_n el numero de formas distintas de construir una torre de altura n. Encuentra una relación de recurrencia para hallar T_n.

Solución.

Ejercicio 10. Sea la matriz cuadrada de orden n, $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo termino general es $D_n = \det A_n$ y resuélvela.

Solución. Desarrollando por la primera columna:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde el segundo determinante, desarrollando por la primera fila, es

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así, D_n cumple la relación de recurrencia $D_n = 2D_{n-2} - D_{n-2}$.
Como condiciones iniciales tenemos

- $D_1 = 2$,
- $D_2 = 4 - 1 = 3$.

Para resolverla seguimos los pasos habituales:
La ecuación característica es $x^2 = 2x - 1$.
Las raíces características son las raíces de $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (raíz doble).
La solución general es $D_n = A \cdot (1)^n + B \cdot n \cdot (1)^n = A + B \cdot n$.
Para calcular la solución particular aplicamos las condiciones iniciales:
$\left.\begin{array}{l} D_1 = A + B = 2 \\ D_2 = A + 2B = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array}\right.$
Así, la solución de la relación de recurrencia es $D_n = 1 + n$.