6. ECUACIONES DE RECURRENCIA.

6.1. Introducción.

Las relaciones de recurrencia pueden considerarse como técnicas avanzadas de conteo. Resuelven problemas cuya solución no puede obtenerse usando variaciones, permutaciones, combinaciones o con las técnicas derivadas del principio de inclusión-exclusión.

Recordemos que una **sucesión** es una función $f:\mathbb{N}\longrightarrow A$. Para indicar la imagen en el conjunto A de n, esto es $f(n)$, se emplea el símbolo a_n.

Una sucesión suele denotarse por $a_0,a_1,a_2,a_3,...$, por $\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$, por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o por $\{a_n\}$. A los elementos $a_0,a_1,a_2...$ se les llama *términos* de la sucesión, de a_n se dice que es el término general.

Para introducir la teoría de las relaciones de recurrencia, tomemos como ejemplo la conocida sucesión de Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13,... donde cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores, esto es:

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \qquad \text{si } n\geq 3,$$

Una expresión de este tipo, en la que el término general de la sucesión se escribe en función de algunos otros términos anteriores, recibe los nombres de **relación de recurrencia**, **ecuación de recurrencia** o **ecuación en diferencias**.

La relación de recurrencia no determina de manera única la sucesión. Para ello es necesario conocer algunos términos de la sucesión, lo que llamaremos **condiciones iniciales** o **condiciones frontera**. En el caso anterior $a_1=1$ y $a_2=1$.

Ejemplo: Las sucesiones

$$1,2,4,8,16,...$$

$$3,6,12,24,48,...$$

satisfacen la misma relación de recurrencia $a_n=2a_{n-1}$, si $n\geq 1$. La condición inicial $a_0=1$ junto con esta relación de recurrencia determinan de forma única la primera. El conjunto $\{a_n=2a_{n-1}$ si $n\geq 1$, $a_0=3\}$ define la segunda.

Si queremos obtener un término concreto de una sucesión dada en forma recurrente debemos ir obteniendo todos los anteriores lo cual no parece muy práctico, (¿cual es el valor a_{100} en la sucesión de Fibonacci?). Interesa pues, determinar una expresión del tipo $a_n=g(n)$ en la que el término general de la sucesión dependa sólo de la posición que ocupa y no de términos anteriores. A una expresión de este tipo se llama solución de la ecuación de recurrencia.

Ejemplo 1. Para las siguientes ecuaciones de recurrencia la solución se obtiene de forma elemental.

1.1) Para $a_n=3a_{n-1}$ si $n\geq1$, $a_0=5$ se tiene

$a_0= 5,$

$a_1= 3a_0= 3\times5,$

$a_2= 3a_1= 3^2\times5,$

y aplicando inducción se obtiene que la sucesión solución es

$a_n= 3^n\times5$

1.2) Sea $a_n-a_{n-1}=(n-1)$ si $n\geq1$ con $a_1=0$. Despejando $a_n=a_{n-1}+(n-1)$ se tiene

$a_1= 0,$

$a_2= a_1+1= 0+1,$

$a_3= a_2+2= 0+1+2,$

...

$a_n= 0+1+2+...+(n-1) =(n-1)n/2$

1.3) $a_n-na_{n-1}=0$ si $n\geq1$, $a_0=1$

$a_0= 1,$

$a_1= 1.a_0= 1,$

$a_2= 2.a_1= 2\times1,$

$a_3= 3.a_2= 3\times2\times1,$

...

$a_n= n\times(n-1)\times...\times3\times2\times1= n!$

No nos ocuparemos de ecuaciones como esta última en la que el coeficiente de a_{n-1} es *variable*. Trataremos sólamente de las ecuaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes que definimos a continuación.

Definición. Una **ecuación de recurrencia lineal de orden k con coeficientes constantes** es una relación

$$c_n a_n+c_{n-1}a_{n-1}+...+c_{n-k}a_{n-k}= b_n, \quad n\geq k \qquad \text{(I)}$$

donde $c_n,c_{n-1},...,c_{n-k}$ son constantes con $c_n\neq0$ y $c_{n-k}\neq0$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión conocida. Diremos que (I) es **homogénea** si $b_n=0$.

Centraremos nuestra atención en el cálculo explícito de la solución de tales ecuaciones. El problema consiste en determinar la solución $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en forma cerrada, es decir expresar a_n como una función conocida de n. Si fijamos *condiciones iniciales*, esto es valores para $a_0,a_1,...,a_{k-1}$, la solución de (I) está unívocamente determinada.

En general encontrar la solución de una ecuación de recurrencia no es fácil. Veamos cómo hacerlo para cierta familia de ecuaciones de recurrencia.

6.2. Ecuación de recurrencia lineal homogénea.

Antes de generalizar, comenzamos obteniendo la solución de la ecuación homogénea de primer y segundo orden.

La <u>ecuación de recurrencia homogénea de orden 1</u>

$$a_n = c.a_{n-1} \quad n\geq 1, \qquad c\neq 0$$

verifica $a_n= ca_{n-1}= c^2a_{n-2}= c^3a_{n-3}= ...= c^na_0$.

Por tanto la solución es de la forma $a_n= \alpha.c^n$ con $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$. El valor de α viene determinado por la condición frontera.

La <u>ecuación de recurrencia homogénea de orden 2</u> es

$$c_na_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} = 0, \; n\geq 2 \qquad\qquad c_n\neq 0 \text{ y } c_{n-k}\neq 0$$

y su solución general es de la forma

$$a_n= \alpha.s1_n + \beta.s2_n$$

con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y donde $\{s1_n\}$ y $\{s2_n\}$ son dos sucesiones solución independientes de la ecuación. (Dos sucesiones son **independientes** si una no es múltiplo escalar de la otra). Si bien se puede demostrar que tales soluciones siempre existen, nos centramos en la manera práctica de obtenerlas.

¿Donde buscar estas soluciones particulares?. La idea nos la da la ecuación de orden 1. Si probamos con una de la forma $a_n=r^n$, siendo $r\neq 0$ ($r=0$ correspondería a la solución trivial) se tiene,

$$c_nr^n + c_{n-1}r^{n-1} + c_{n-2}r^{n-2}= 0$$

$$r^{n-2} (c_nr^2 + c_{n-1}r + c_{n-2})= 0$$

y como $r\neq 0$, para que r^n sea solución debe ser raíz del polinomio

$$P(x) =c_nx^2 + c_{n-1}x + c_{n-2}$$

Al polinomio P(x) se le llama *polinomio característico* de la ecuación de recurrencia y sus raíces determinan la forma de la solución. Así,

(a) si P(x) tiene sus dos raíces distintas r_1 y r_2 (ambas reales o ambas complejas), entonces r_1^n y r_2^n son las soluciones independientes buscadas y la solución general es

$$a_n = \alpha.r_1^n+\beta.r_2^n$$

(b) si P(x) tiene una única raíz real *r* de multiplicidad 2, entonces claramente la sucesión r^n es una solución y se puede probar (hágase) que nr^n es otra solución independiente de la anterior. Luego la solución general es

$$a_n = \alpha.r^n+\beta.nr^n$$

En ambos casos los valores de α y β se determinan utilizando las condiciones frontera.

Ejemplo 2. Resolvamos $\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0, & n\geq 2 \\ a_0=1, \; a_1=2 \end{cases}$

La ecuación característica $x^2+x-6=0$ tiene *dos raíces reales distintas* que son 2 y -3, y por tanto la solución general es

$$a_n = \alpha.2^n+ \beta.(-3)^n$$

Para determinar α y β con las condiciones frontera para n=0 ($a_0=\alpha.2^0+\beta.(-3)^0=1$) y n=1 ($a_1=\alpha.2^1+\beta.(-3)^1=2$) obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ 2\alpha-3\beta=2 \end{cases}$$

cuya solución, $\alpha=1$ y $\beta=0$, nos permite establecer que la solución única de la ecuación de recurrencia dada es $a_n = 2^n$.

Ejemplo 3. Resolvamos $\begin{cases} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, & n\geq 2 \\ a_0=5, \; a_1=12 \end{cases}$

Polinomio característico: x^2-6x+9

Raíces: 3 (*una raíz doble*)

Soluciones independientes: 3^n y $n3^n$

Solución general: $a_n=\alpha.3^n+\beta.n3^n$

Las condiciones frontera para n=0 y n=1 determinan el sistema $\begin{cases} \alpha=5 \\ 3\alpha+3\beta=12 \end{cases}$ cuya solución es $\alpha=5$ y $\beta=-1$.

Solución de la ecuación de recurrencia: $a_n=5.3^n- n3^n$

Ejemplo 4. Resolvamos $\begin{cases} a_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}, \ n\geq 2 \\ a_0=1, \ a_1=2 \end{cases}$

Polinomio característico: x^2-2x+2

Raíces: 1+i y 1-i (*dos raíces distintas complejas*)

Solución general: En principio es de la forma

$$a_n=\alpha.(1+i)^n+\beta.(1-i)^n$$

pero utilizando propiedades de los números complejos se tiene

$$(1+i)=\sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}) \quad \text{y} \quad (1-i)=\sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4}-i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})$$

$$(1+i)^n=\sqrt{2}^n\ (\cos n\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\ n\frac{\pi}{4}) \quad \text{y} \quad (1-i)^n=\sqrt{2}^n\ (\cos n\frac{\pi}{4}-i\,\mathrm{sen}\ n\frac{\pi}{4})$$

de donde

$$a_n=\sqrt{2}^n\ [(\alpha+\beta)\cos n\frac{\pi}{4}+(\alpha-\beta)i\,\mathrm{sen}\ n\frac{\pi}{4}]$$

y llamando $k_1=\alpha+\beta$ y $k_2=(\alpha-\beta)i$,

las condiciones frontera para n=0 y n=1 determinan el sistema

$\begin{cases} k_1\cos 0 + k_2\mathrm{sen}\ 0 = 1 \\ \sqrt{2}\ [k_1\cos\frac{\pi}{4}+k_2\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}] = 2 \end{cases}$ cuya solución es $k_1=1$ y $k_2=1$.

(Observar que aunque en principio k_1 y k_2 eran números complejos, finalmente resultan ser reales).

Solución de la ecuación de recurrencia: $a_n=\sqrt{2}^n[\cos n\frac{\pi}{4}+\mathrm{sen}\ n\frac{\pi}{4}]$

Generalizando los resultados anteriores para <u>la ecuación de recurrencia homogénea de orden k</u>

$$c_na_n + c_{n-1}a_{n-1} +...+ c_{n-k}a_{n-k}= 0\ ,\ n\geq k$$

se tiene que si $\{s1_n\},\{s2_n\},...,\{sk_n\}$ son soluciones particulares independientes, entonces su solución general es

$$a_n= \alpha_1.s1_n + \alpha_2.s2_n +...+ \alpha_k.sk_n$$

donde $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ son constantes que se determinan utilizando las condiciones iniciales.

Para encontrar estas soluciones particulares probamos con una de la forma $a_n=r^n$, siendo $r\neq 0$ (r=0 correspondería a la solución trivial). Entonces,

$$c_nr^n + c_{n-1}r^{n-1} +...+ c_{n-k}r^{n-k}= 0$$

$$r^{n-k}\ (c_nr^k + c_{n-1}r^{k-1} +...+ c_{n-k})= 0$$

por lo que para que r^n sea solución de la ecuación, r debe ser raíz del polinomio $P(x)=c_n x^k+c_{n-1}x^{k-1}+...+c_{n-k}$ al que llamaremos *polinomio característico* de la ecuación homogénea de orden k.

En función de cómo sean las raíces del polinomio característico distinguimos dos casos:

(a) Todas las raíces de P(x) son simples.

Si P(x) tiene sus k raíces distintas, r_1, r_2, ..., r_k, entonces las k soluciones independientes son r_1^n, r_2^n, ... y r_k^n y la solución general es

$$a_n= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n +...+ \alpha_k r_k^n$$

(b) P(x) tiene alguna raíz de multiplicidad >1.

Sea $P(x)= (x-r_1)^{k_1}.(x-r_2)^{k_2}...(x-r_t)^{k_t}$ con $k_1+k_2...k_t=k$. Es decir P(x) tiene raíces distintas r_1, r_2, ..., r_t con multiplicidad k_1, k_2, ..., k_t respectivamente. Entonces cada raíz del polinomio cararacterístico contribuye con tantas soluciones como indique su multiplicidad. Esto es, para cada j=1,...,t se tiene que las k_j sucesiones

$$(r_j)^n,\ n(r_j)^n,\ n^2(r_j)^n,\ ...,\ n^{k_j-1}(r_j)^n$$

son soluciones independientes de la ecuación de recurrencia.

¿Como escribirías la solución general?

Ejemplo 5. $\begin{cases} 2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n, & n\geq 0 \\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2 \end{cases}$

Polinomio característico: $2x^3-x^2-2x+1$

Raíces: 1, -1, 1/2

Solución general: $a_n= \alpha.1^n + \beta(-1)^n + \gamma(1/2)^n$

Las condiciones frontera para n=0, n=1 y n=2 determinan el sistema

$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma =0 \\ \alpha - \beta + 1/2\ \gamma =1 \\ \alpha + \beta + 1/4\ \gamma =2 \end{cases}$ cuya solución es $\alpha=5/2$, $\beta=1/6$, $\gamma=-8/3$

Solución: $a_n= \frac{5}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{8}{3}(1/2)^n$

Ejemplo 6. $a_n -3a_{n-1}+ 3a_{n-2} - a_{n-3} =0,\ n\geq 3,$

Polinomio característico: x^3-3x^2+3x-1

Raíces: 1 (raíz triple)

Solución general: $a_n= \alpha.(1^n) + \beta.(n1^n) + \gamma.(n^2 1^n)$

6.3 Ecuación de recurrencia lineal no homogénea.

Consideremos la ecuación de recurrencia lineal de orden k

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = b_n, \qquad n \geq k \qquad \text{(I)}$$

llamaremos ecuación de recurrencia *homogénea asociada* a (I) a la ecuación

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = 0, \qquad n \geq k$$

Enunciamos sin demostración la siguiente propiedad:
Cualquier solución $\{a_n\}$ de (I), verificando determinadas condiciones iniciales $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$, se puede escribir como

$$a_n = p_n + h_n$$

donde $\{p_n\}$ es una solución particular de (I) y $\{h_n\}$ es la solución de la homogénea asociada.

Ya hemos visto en el apartado anterior cual es la solución de la ecuación de recurrencia homogénea. Respecto de cómo obtener una solución particular de (I) podemos decir que no hay métodos generales. Sin embargo, se espera que con los ejemplos que se ponen se adquiera cierta destreza para encontrarlas. Probaremos con soluciones particulares p_n de la forma sugerida por b_n. Por ejemplo si la sucesión b_n es una función polinómica en n de grado t, podemos probar con una solución particular también polinómica del mismo grado.

Ejemplo 6. Para encontrar una solución particular de la ecuación de recurrencia $a_n+2a_{n-1}=3$, como $b_n=3$ es una constante, probamos con $a_n=A$. Sustituyendo en la ecuación se tiene A+2A=3. Es decir A=1. Por tanto $a_n=1$ es una solución particular.

Ejemplo 7. En la ecuación $a_n+2a_{n-1}= n^2-n-1$, $b_n=n^2-n-1$ es un polinomio en n de grado 2. Probamos si puede ser solución una sucesión del mismo tipo, $a_n=An^2+Bn+C$. Y efectivamente se obtienen los valores A=1/3, B=1/9, C=-13/27.

Ejemplo 8. Consideramos ahora $a_n-3a_{n-1}= 5(7^n)$. Aquí probamos con una sucesión de la forma $a_n=A7^n$. Sustituyendo en la ecuación, tenemos $A(7^n)-3A(7^{n-1})=5(7^n)$, de donde A=35/4. Esto es, una solución particular es $a_n=(35/4).7^n$

Ejemplo 9. La técnica mostrada en los ejemplos anteriores sólo será válida cuando b_n, o algún sumando de b_n, no contenga ningún factor que sea solución de la homogénea. Así para

$$a_n - a_{n-1} = 2$$

si probamos con una sucesión constante de la forma a_n=A, al sustituir nos da una contradicción (0=2), de lo que se deduce que no existe ninguna solución particular de esta forma (polinómica de grado 0). En estos casos pobraremos con soluciones polinómicas de grado superior al que tiene la sucesión b_n. Para nuestro ejemplo tomando una de la forma $a_n=A+Bn$, obtenemos A=0, B=2 y por tanto la solución particular es $\{2n\}$.

Ejemplo 10. Dada la ecuación

$$a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n)$$

probamos con $p_n=A3^n$. La sustitución de a_n por $A3^n$ nos lleva a la contradicción 0=5. (Observar que aquí la solución de la homogénea asociada es $h_n=\alpha 3^n$).
No existe, por tanto, ninguna solución particular de la forma $\{A3^n\}$.
En este caso, probamos con una de la forma $\{An3^n\}$ y obtenemos que $\{5n3^n\}$ es una solución particular.
Recordar que la solución general será de la forma $a_n=\alpha.3^n+5.n.3^n$ donde el valor de α se determinaría aplicando las condiciones iniciales.

En general, construiremos una solución particular p_n de la ecuación (I) según se indica en los siguientes apartados:

(a) Si b_n es un múltiplo constante de una de las siguientes formas y no es solución de la homogénea asociada, entonces p_n tiene la forma mostrada en la tabla (K, r, α, A, B, A_0, A_1,...A_{t-1} y A_t son constantes):

b_n	p_n
K	A
n	$A_1n + A_0$
n^2	$A_2n^2 + A_1n + A_0$
n^t	$A_tn^t+A_{t-1}n^{t-1}+...+A_1n+A_0$
r^n	Ar^n
n^tr^n	$r^n(A_tn^t+A_{t-1}n^{t-1}+...+A_1n+A_0)$
sen αn	Asen(αn) + Bcos(αn)
cos αn	Asen(αn) + Bcos(αn)

(Las constantes A,B,A_0,A_1,...A_{t-1},A_t se determinan sustituyendo p_n en la ecuación dada).

(b) Si b_n consta de una suma de múltiplos constantes de términos como los de la primera columna de la tabla anterior, entonces p_n está formada por la suma de los términos correspondientes de la segunda columna.

(c) Si un sumando de b_n contiene un factor (r^n) que es solución de la homogénea asociada y r es raíz de multiplicidad k en el polinomio característico, entonces la parte de p_n correspondiente a ese sumando debe multiplicarse por n^k.

Ejemplo 11. Resolvamos la siguiente ecuación de recurrencia

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 3, \ n\geq 2$$

con las condiciones iniciales $a_0=1/2$, $a_1=3$.

La solución de la homogénea asociada es $h_n= \alpha(1^n)+ \beta n(1^n)$.

En principio, la forma de b_n nos sugiere que probemos una solución particular constante. Pero, puesto que 1^n es factor de $b_n=3$, 1^n es solución de la homogénea y 1 es raíz característica de multiplicidad 2, lo adecuado es probar con An^2. Efectivamente se encuentra la solución particular $p_n=(3/2)n^2$.

De la forma de la solución general $a_n= \alpha + \beta n + (3/2)n^2$ y de las condiciones iniciales, obtenemos los valores de $\alpha=1/2$ y $\beta=1$. Por tanto la solución es

$$a_n= 1/2 + n + (3/2)n^2$$

Bibliografía:

- Grimaldi, Ralph P. "Matemáticas discreta y combinatoria". 3ª edición. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1997. Capítulo 10.
- Rosen, K.H. "Discrete Mathematics and its applications" 3rd ed. Ed. McGraw-Hill, 1995. Capítulo 5.

6.4. Problemas.

1.- Encontrar la relación de recurrencia que determina de manera única las siguientes sucesiones:

a) {2, 10, 50, 250,...}

b) {6, -18, 54, -162, ...}

c) {1, 1/3, 1/9, ...}

d) {7, 14/5, 28/25, 56/125,...}

2.- El número de bacterias en un cultivo de laboratorio es de 1000 unidades. Sabemos que ese número se incrementa en un 250% cada 2 horas. Encontrar una relación de recurrencia para conocer lo que ocurrirá al cabo de un día.

3.- Suponiendo que una bici ocupa una plaza de aparcamiento para bicis y una moto ocupa dos, encontrar una relación de recurrencia que nos dé el número de formas posibles de aparcar bicis y motos en un aparcamiento de n plazas.

4.- Encontrar una ecuación de recurrencia con la que obtener el número de formas de apilar *n* fichas de póquer de color rojo, blanco, verde y azul de modo que no haya fichas azules consecutivas.

5.- Encontrar una ecuación de recurrencia con la que obtener el número de regiones en las que queda dividido un plano al trazar en él *n* rectas, de forma que se corten dos a dos y tal que tres rectas no tengan un punto en común.

6.- Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones de recurrencia.

a) $a_{n+1} - 1.5a_n = 0, \quad n\geq 0$

b) $4a_n - 5a_{n-1} = 0, \quad n\geq 1$

c) $3a_{n+1} - 4a_n = 0, \ n\geq 0, \quad a_1=5$

d) $2a_n - 3a_{n-1} = 0, \ n\geq 1, \quad a_4=81$

7.- Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia

a) $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad n\geq 2, \quad a_0=1, \ a_1=3$

b) $a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n=0, \ n\geq 0, \quad a_0=2, \ a_1=-8$

c) $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \ n\geq 1, \quad a_0=7, \ a_1=3$

d) $a_{n+2} + a_n=0, \ n\geq 0, \quad a_0=0, \ a_1=3$

e) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2}=0, \ n\geq 2, \quad a_0=5, \ a_1=12$

f) $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2}=0$, $n\geq 2$, $a_0=1$, $a_1=3$

g) $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3}=0$, $n\geq 3$, $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=5$

8.- Si $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=4$ y $a_3=37$ verifican la relación de recurrencia $a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n=0$ para $n\geq 0$ con b,c constantes, dar la expresión de a_n.

9.- Resolver cada una de las ecuaciones de recurrencia obtenidas en los problemas **3**, **4** y **5**.

10.- Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones de recurrencia.

a) $a_{n+1} - a_n = 2n+3$, $n\geq 0$; $a_0=1$

b) $a_{n+1} - a_n = 3n^2-n$, $n\geq 0$; $a_0=3$

c) $a_{n+1} - 2a_n= 5$, $n\geq 0$; $a_0=1$

d) $a_{n+1} - 2a_n= 2^n$, $n\geq 0$; $a_0=1$

11.- Usar una relación de recurrencia para deducir la fórmula de $\sum_{i=0}^{n} i^2$.

12.- Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia

a) $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n= 3^n$, $n\geq 0$; $a_0=0$, $a_1=1$

b) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n= 7$, $n\geq 0$; $a_0=1$, $a_1=2$

c) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n= n^2$, $n\geq 0$; $a_0=0$, $a_1=2$

d) $a_{n+2} - a_n= \mathrm{sen}(n\pi/2)$, $n\geq 0$; $a_0=1$, $a_1=1$