Matemática Discreta

SOLUCIONES DEL EXAMEN FINAL

Febrero 2004

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (tarde) y de Gestión

Ejercicio 1: [Lógica de predicados] Escribir de forma simbólica las siguientes sentencias y su negación:

- Nadie sabe lo de su enfermedad.
- Si alguno hubiese estado informado, entonces todos hubieran estado informados.
- No existe ser humano capaz de guardar el secreto sabiendo lo de su enfermedad.

Sea U el universo del discurso asociado (en este caso, por ejemplo, todos los seres humanos)

- $M(x)$:= x sabe lo de su enfermedad;

$$\forall x \in U, \neg M(x), \text{ negación: } \exists x \in U,\ M(x).$$

- $n(x) := x$; x está informado;

$$(\exists x \in UN(x)) \Rightarrow (\forall x \in U, N(x)) \text{ negación: } (\exists x \in U, N(x)) \wedge (\exists x \in U, \neg N(x))$$

- $S(x) := x$ ser capaz de guardar el secreto;

$$\forall x \in U, (M(x) \Rightarrow \neg S(x)) \text{ negación } \exists x \in U, (M(x) \wedge S(x))$$

Ejercicio 2: [Algoritmos] Dado el siguiente algoritmo,
Entrada: $a_{ij}, b_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$ ($2n^2$ números enteros)
For $i = 1$ to n
    For $j = 1$ to n

$c_{ij} = 0$

For $k = 1$ to n

$c_{ij} = c_{ij} + b_{ik}a_{kj}$

Salida: $c_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$

Explica razonadamente qué problema resuelve y estudia su complejidad en función de n.

Este algoritmo recibe como entrada las n^2 entradas de dos matrices de enteros, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, y su salida son las entradas de la matriz producto $C = AB$, $C = (c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj})$. La complejidad del algoritmo es cúbica, pues el bucle externo se repite n veces, el segundo otras n y el más interno n más, realizándose en su interior un producto y una suma.

Ejercicio 3:
[Aritmética Modular]

- a) Calcula, si existe, el inverso de 3 módulo 12 y el de 7 módulo 11. Justifica tu respuesta.
- b) Calcula $7^{16} \mod 9$.

- a) Para que exista inverso de un entero n módulo m, es necesario y suficiente que n y m sean primos entre sí, en tal caso, la identidad de Bezout garantiza la existencia de enteros α y β tales que

  $$\alpha m + \beta n = 1.$$

  Estos enteros pueden calcularse usando el algoritmo de Euclides. Así, no existe inverso de 3 módulo 12 (pues 3 divide a 12) y sí de 7 módulo 11, de hecho,

  $$7 \cdot 8 - 5 \cdot 11 = 1,$$

  de donde 8 es el inverso de 7 módulo 11.

- b) Como $7^4 = (7^2)^2$, razonamos que $7^2 \equiv 4 \, mod \, 9$, de donde $7^4 \equiv 4^2 \, mod \, 9$, siendo $4^2 = 16 \equiv 7 \, mod \, 9$. Ahora, $7^{16} = (7^4)^4 \equiv 7^4 \, mod \, 9$, luego $7^{16} \equiv 7 \, mod \, 9$.

Ejercicio 4: Resuelve los siguientes problemas:

a) (3 puntos) Existen 12 signos zodiacales. ¿Cuál es el tamaño mínimo de un grupo de personas que garantiza que al menos seis de ellas tienen el mismo signo?

Por el Principio del Palomar la respuesta es $12 \times 5 + 1 = 61$ personas.

b) (7 puntos) Tenemos tres urnas numeradas de uno hasta tres y treinta bolas: diez rojas, diez negras y diez blancas. ¿De cuántas maneras distintas podemos colocar todas las bolas dentro de las urnas?

Ya que no hay ninguna restricción sobre como colocar las treinta bolas en las tres urnas, si n el número de maneras distintas de repartir las diez bolas de un color dado, por ejemplo las bolas rojas, la solución del problema es n^3.

Cada posible repartición de las diez bolas rojas se puede representar por medio de una palabra binaria formada por 10 unos y dos ceros: los dos ceros sirven para separar tres secuencias de unos, cuya longitud es igual al número de bolas en la primera, segunda y tercera urna respectivamente.

Se trata entonces de permutaciones con repeticiones de 12 elementos:

$$n = PR_{12}^{2,10} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \times 11}{2} = 66.$$

Se obtiene la misma respuesta usando combinaciones con repeticiones de 3 elementos (las tres urnas) tomados de 10 en 10:

$$n = CR_{3,10} = \binom{12}{10} = 66.$$

Se sigue que el número total de maneras de repartir las treinta bolas en las tres urnas es $66^3 = 287496$.

Ejercicio 5: Resuelve los siguientes problemas:

a) (6 puntos) Un viajero llega a la orilla de un río llevando consigo un lobo, una oveja y una col. Para cruzar el río dispone de una pequeña barca en la cual caben únicamente él y uno de entre lobo, oveja y col. Sabe que sólo su presencia impide que el lobo devore la oveja o que la oveja se coma la col. ¿Qué procedimiento debe seguir par cruzar el río?

Sugerencia: Utiliza un grafo cuyos vértices representen las posiciones permitidas del viajero, lobo, oveja y col (por ejemplo, el vértice VLO-C puede representar la posición viajero, lobo y oveja en la orilla izquierda y col en la orilla derecha), y tal que existe una arista entre dos posiciones sólo si es posible pasar de una a la otra cruzando una vez el río.

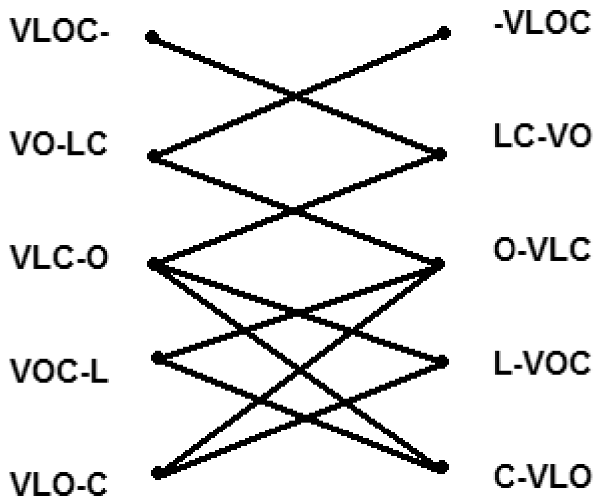

Figura 1: Ejercicio 5 a)

Las posiciones permitidas son:

$$\{VLOC-, -VLOC, L-VOC, VOC-L, O-VLC, VLC-O,$$
$$C-VLO, VLO-C, VO-LC, LC-VO\}$$

y las arista son las de la Figura 1:

El camino

$$\{VLOC-, LC-VO, VLC-O, L-VOC, VLO-C, O-VLC, VO-LC, -VLOC\}$$

es un procedimiento para cruzar el río.

b) (4 puntos) Sea G un grafo bipartido con un número impar de vértices. Demuestra que no es hamiltoniano.

Si G fuese hamiltoniano, existiría un circuito hamiltoniano. Siendo bipartido, cada vértice de G es adyacente sólo a vértices del conjunto al cual no pertenece. Entonces todo ciclo tiene que pasar por un número par de vértices distintos y por tanto no puede ser un circuito hamiltoniano.

Ejercicio 6: Sean

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

y

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(b,a),(d,a),(e,a),(c,a),(c,b),(d,b),(d,e)\}$$

una relación binaria en A.

i) (3 puntos) Escribe la matriz de adyacencias del grafo G asociado a la relación R.

La matriz de adyacencias de R es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) (4 puntos) Determina si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva para verificar si es una relación de equivalencia o de orden.

R es reflexiva ya que todo elemento de A está en relación consigo mismo (los elementos diagonales de M son todos unos).

R no es simétrica ya que, por ejemplo, cRa pero y a no está en relación con c (M no es simétrica).

R es antisimétrica ya que xRy e yRx sólo si $x = y$ (si $M(i,j) \neq 0$, $M(i,j) \neq M(j,i)$ para todos i y j con $i \neq j$).

R es transitiva ya que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y, para todo par (i,j), $M^2(i,j) \neq 0$ implica $M(i,j) \neq 0$.

Se sigue que R no es de equivalencia y es una relación de orden.

iii) (3 puntos) Sea H el grafo no dirigido que se obtiene de G simplemente borrando la orientación de sus aristas. Halla un árbol generador de H.

La Figura 2 representa el grafo H y el árbol generador que se obtiene a partir del vértice a aplicando una búsqueda en amplitud.

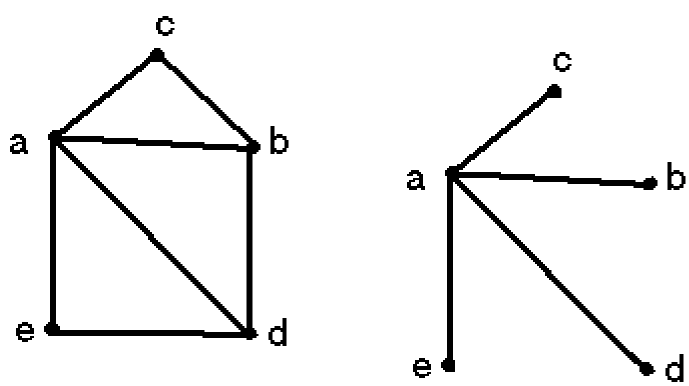

Figura 2: El grafo H y un árbol generador