

Problemas

1. Enumera los pares ordenados de la relación R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{0, 1, 2, 3\}$, donde $(a, b) \in R$ si, y sólo si,

- a) $a = b$ b) $a + b = 4$ c) $a > b$
 d) a / b e) $\text{mcd}(a, b) = 1$ f) $\text{mcm}(a, b) = 2$

2. a) Enumera todos los pares ordenados de la relación $R = \{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$ en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- b) Representa esta relación gráficamente como se hizo en el Ejemplo 4.
 c) Representa esta relación con una tabla como se hizo en el Ejemplo 4.

3. Para cada una de estas relaciones en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, decide si es o no reflexiva, si es o no simétrica, si es o no antisimétrica y si es o no transitiva.

- a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
 b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
 c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$
 d) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
 e) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
 f) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

4. Determina si la relación R en el conjunto de todas las personas es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, donde $(a, b) \in R$ si, y sólo si,

- a) a es más alto que b .
 b) a y b nacieron el mismo día.
 c) a tiene el mismo nombre de pila que b .
 d) a y b tienen un abuelo o abuela en común.

5. Determina si la relación R en el conjunto de todas las páginas web es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, donde $(a, b) \in R$ si, y sólo si,

- a) todo el que ha visitado la página web a ha visitado también la página web b .
 b) las páginas web a y b no incluyen ningún enlace en común con una tercera página.
 c) las páginas web a y b contienen al menos un enlace en común con una tercera página.
 d) existe una página web que incluye enlaces con ambas páginas web a y b .

6. Determina si la relación R en el conjunto de todos los números reales es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, donde $(x, y) \in R$ si, y sólo si,

- a) $x + y = 0$ b) $x = \pm y$
 c) $x - y$ es un número racional
 d) $x = 2y$ e) $xy \geq 0$
 f) $xy = 0$ g) $x = 1$
 h) $x = 1$ o $y = 1$.

7. Determina si la relación R en el conjunto de todos los enteros es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, donde $(x, y) \in R$ si, y sólo si,

- a) $x \neq y$ b) $xy \geq 1$
 c) $x = y + 1$ o $x = y - 1$
 d) $x \equiv y \pmod{7}$ e) x es un múltiplo de y

f) x e y son ambos negativos o ambos no negativos

g) $x = y^2$ h) $x \geq y^2$

8. Da un ejemplo de relación en un conjunto que

- a) sea simétrica y antisimétrica
 b) no sea ni simétrica ni antisimétrica

☞ Una relación R en un conjunto A es **irreflexiva** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \notin R$. Esto es, R es irreflexiva si ningún elemento de A está relacionado consigo mismo.

9. De las relaciones del Problema 3, ¿cuáles son irreflexivas?

10. De las relaciones del Problema 4, ¿cuáles son irreflexivas?

11. De las relaciones del Problema 5, ¿cuáles son irreflexivas?

12. De las relaciones del Problema 6, ¿cuáles son irreflexivas?

13. ¿Puede una relación en un conjunto no ser ni reflexiva ni irreflexiva?

14. Usa cuantificadores para expresar lo que significa que una relación sea irreflexiva.

15. Da un ejemplo de relación irreflexiva en el conjunto de todas las personas.

Una relación R se dice **asimétrica** si $(a, b) \in R$ implica que $(b, a) \notin R$.

16. De las relaciones del Problema 3, ¿cuáles son asimétricas?

17. De las relaciones del Problema 4, ¿cuáles son asimétricas?

18. De las relaciones del Problema 5, ¿cuáles son asimétricas?

19. De las relaciones del Problema 6, ¿cuáles son asimétricas?

20. ¿Una relación asimétrica tiene que ser por fuerza antisimétrica? ¿Una relación antisimétrica tiene que ser por fuerza asimétrica? Razona tus respuestas.

21. Usa cuantificadores para expresar lo que significa que una relación sea asimétrica.

22. Da un ejemplo de relación asimétrica en el conjunto de todas las personas.

23. ¿Cuántas relaciones distintas hay de un conjunto con m elementos en un conjunto con n elementos?

☞ Sea R una relación de un conjunto A en un conjunto B . La **relación inversa** de B en A , que se denota por R^{-1} , es el conjunto de pares ordenados $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. La **relación complementaria** \bar{R} es el conjunto de pares ordenados $\{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$.

24. Sea R la relación $R = \{(a, b) \mid a < b\}$ en el conjunto de los números enteros. Halla

- a) R^{-1} b) \bar{R}

25. Sea R la relación $R = \{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$ en el conjunto de los números enteros positivos. Halla

- a) R^{-1} b) \bar{R}

26. Sea R la relación en el conjunto de todos los países de la Unión Europea que consta de los pares (a, b) en que el país a es fronterizo con el país b . Halla
a) R^{-1} b) \bar{R}
27. Supón que la función f de A en B es biyectiva. Sea R la relación que es igual a la gráfica de f . Esto es, $R = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$. ¿Cuál es la relación inversa R^{-1} ?
28. Sean $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ relaciones de $\{1, 2, 3\}$ en $\{1, 2, 3, 4\}$. Halla
a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$
c) $R_1 - R_2$ d) $R_1 - R_2$
29. Sean A el conjunto de estudiantes de tu escuela y B el conjunto de los libros de la biblioteca de la escuela. Sean R_1 y R_2 las relaciones que consisten en todos los pares ordenados (a, b) en los que el libro b es de lectura obligatoria para el estudiante a y en los que el estudiante a ha leído el libro b , respectivamente. Describe los pares ordenados de cada una de las siguientes relaciones.
a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 \oplus R_2$
d) $R_1 - R_2$ e) $R_2 - R_1$
30. Sea R la relación $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ y sea S la relación $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$. Halla $S \circ R$.
31. Sea R la relación en el conjunto de todas las personas que consiste en los pares (a, b) en los que a es padre o madre de b . Sea S la relación en el conjunto de todas las personas que consiste en los pares (a, b) en los que a es hermano o hermana de b . Determina $S \circ R$ y $R \circ S$.
- Los Problemas 32-35 involucran las siguientes relaciones en el conjunto de los números reales.
 $R_1 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a > b\}$, la relación «mayor que»
 $R_2 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \geq b\}$, la relación «mayor o igual que»
 $R_3 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a < b\}$, la relación «menor que»
 $R_4 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq b\}$, la relación «menor o igual que»
 $R_5 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a = b\}$, la relación «igual a»
 $R_6 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \neq b\}$, la relación «distinto de»
32. Halla
a) $R_1 \cup R_3$ b) $R_1 \cup R_5$ c) $R_2 \cap R_4$
d) $R_3 \cap R_5$ e) $R_1 - R_2$ f) $R_2 - R_1$
g) $R_1 \oplus R_3$ h) $R_2 \oplus R_4$
33. Halla
a) $R_2 \cup R_4$ b) $R_3 \cup R_6$ c) $R_3 \cap R_6$
d) $R_4 \cap R_6$ e) $R_3 - R_6$ f) $R_6 - R_3$
g) $R_2 \oplus R_6$ h) $R_3 \oplus R_5$
34. Halla
a) $R_1 \circ R_1$ b) $R_1 \circ R_2$ c) $R_1 \circ R_3$
d) $R_1 \circ R_4$ e) $R_1 \circ R_5$ f) $R_1 \circ R_6$
g) $R_2 \circ R_3$ h) $R_3 \circ R_3$
35. Halla
a) $R_2 \circ R_1$ b) $R_2 \circ R_2$ c) $R_3 \circ R_5$
d) $R_4 \circ R_1$ e) $R_5 \circ R_3$ f) $R_3 \circ R_6$
g) $R_4 \circ R_6$ h) $R_6 \circ R_6$
36. Sea R la relación de paternidad en el conjunto de todas las personas (véase el Ejemplo 21). ¿Cuándo pertenece un par ordenado a la relación R^3 ?
37. Sea R la relación en el conjunto de personas con el título de doctor tal que $(a, b) \in R$ si, y sólo si, a fue director de tesis de b . ¿Cuándo está un par ordenado (a, b) en R^2 ? ¿Cuándo está un par ordenado (a, b) en R^n , siendo n un entero positivo? (Ten en cuenta que cada persona con un título de doctor ha tenido un director de tesis).
38. Sean R_1 y R_2 , respectivamente, las relaciones «divide a» y «es múltiplo de» en el conjunto de todos los enteros positivos. Esto es, $R_1 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \text{ divide a } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \text{ es múltiplo de } b\}$. Halla
a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 - R_2$
d) $R_2 - R_1$ e) $R_1 \oplus R_2$
39. Sean R_1 y R_2 , respectivamente, las relaciones «congruente módulo 3» y «congruente módulo 4» en el conjunto de los enteros. Esto es, $R_1 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ y $R_2 = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \equiv b \pmod{4}\}$. Halla
a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 - R_2$
d) $R_2 - R_1$ e) $R_1 \oplus R_2$
40. Enumera las 16 relaciones distintas en el conjunto $\{0, 1\}$.
41. ¿Cuántas de las 16 relaciones distintas en $\{0, 1\}$ contienen al par $(0, 1)$?
42. ¿Cuáles de las 16 relaciones distintas en $\{0, 1\}$ que enumeraste en el Problema 40 son
a) reflexivas? b) irreflexivas?
c) simétricas? d) antisimétricas?
e) asimétricas? f) transitivas?
43. a) ¿Cuántas relaciones hay en el conjunto $\{a, b, c, d\}$?
b) ¿Cuántas relaciones hay en el conjunto $\{a, b, c, d\}$ que contengan al par (a, a) ?
44. Sea S un conjunto de n elementos y sean a y b elementos distintos de S . ¿Cuántas relaciones hay en S tales que
a) $(a, b) \in S$? b) $(a, b) \notin S$?
c) no hay ningún par ordenado en la relación que tenga a a como primer elemento?
d) hay al menos un par ordenado en la relación que tiene a a como primer elemento?
e) no hay ningún par ordenado en la relación que tenga a a como primer elemento y no hay ningún par ordenado en la relación que tenga a b como segundo elemento?
f) hay al menos un par ordenado en la relación que tiene bien a a como primer elemento o bien a b como segundo elemento?
- *45. ¿Cuántas relaciones hay en un conjunto de n elementos que sean
a) simétricas? b) antisimétricas?
c) asimétricas? d) irreflexivas?
e) reflexivas y simétricas?
f) ni reflexivas ni irreflexivas?