Nombre y Apellidos:

Examen Parcial, curso 2004-2005

I.T.I.G., Diciembre 2004

Tiempo: 1 hora y media.

---

*El examen está formado por tres problemas, todos valen exactamente lo mismo y están puntuados sobre diez - el valor de cada apartado se especifica en cada ejercicio.**Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas**.No podéis consultar apuntes, pero está permitido el uso de calculadoras.*

Ejercicio 1 - MODELO A: (10 puntos) Demuestra por inducción que

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

para todo n entero positivo.

Solución:

Base de inducción: Comprobamos que es cierto para $n = 1$*:* $1{\cdot}1! = (1{+}1)!{-}1$ *si, pues* $1 = 2! - 1$;

Hipótesis de inducción: Suponemos que

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

es cierto.

Paso de inducción: Veamos, usando la hipótesis de inducción, que la igualdad es cierta para $n+1$:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1+1)! - 1,$$

usando la hipótesis de inducción, la igualdad anterior queda:

$$(n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1+1)! - 1,$$

que es obvio que se cumple, sacando factor comun $(n{+}1)!$ *a la izquierda:*

$$(n+1+1) \cdot (n+1)! - 1 = (n+1+1)! - 1.$$

Ejercicio 1 - PARCIAL B: (10 puntos) Demuestra por inducción que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

para todo n entero positivo.

Solución:

Base de inducción: Comprobamos que es cierto para $n = 1$:

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3},$$

lo cual es obvio.

Hipótesis de inducción: Suponemos que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

es cierto.

Paso de inducción: Veamos, usando la hipótesis de inducción, que la igualdad es cierta para $n+1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

usando la hipótesis de inducción, la igualdad anterior queda:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

que es obvio que se cumple, multiplicando todo por 3, tenemos

$$n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)(n+3)$$

y sacando a la izquierda factor común $(n+1)(n+2)$ nos sale $(n+1)(n+2)(n+3)$ a ambos lados del igual.

Ejercicio 2 - PARCIAL A Y PARCIAL B: Dado el siguiente algoritmo escrito en pseudocódigo,

Entrada: $a_1, \ldots, a_n$
$c := 0$
$i := 2$

While $i \leq n$

$j := 1$

While $j \leq i - 1$

If $a_i = a_j$ then $c := j, j := n + 1, i := n + 1$ else $j := j + 1$

i:=i +1

salida: c.

a)(**5 puntos**) Describe qué problema resuelve este algoritmo, observando que recibe como entrada una lista de enteros.

Solución: El algoritmo recibe como entrada una lista de enteros $a_1, \ldots, a_n$ *y la recorre de la siguiente forma, el bucle* i *va avanzando desde la segunda posición a la última, y el* j *recorre los elementos de la lista anteriores a* a_i *y los compara con éste. Si encuentra un elemento igual a* a_i*, el algoritmo para y la salida es* j*; la posición del primer elemento de la lista que se repite. Si en la lista no hay elementos repetidos, la salida es 0.*

b) (**5 puntos**) Estudia su complejidad en función de n.

Solución: El peor caso es cuando no hay elementos repetidos en la lista. Para cada iteración del bucle i*, el while interno se repite* $i-1$ *veces. Sea* K *el número de operaciones que se hacen dentro del bucle interno. Entonces, salvo constantes,* $T(n) = (1+2+\cdot+n-1)\cdot K$*. Como* $1+2+\cdot+n-1 = (\frac{n(n-1)}{2})-n$*, la complejidad del algoritmo es cuadrática.*

Ejercicio 3 - PARCIAL A (el del PARCIAL B se resuelve análogamente): (10 puntos) Calcular todos los los números enteros que son múltiplo de 11, son impares y tales que al dividirlos por 5 nos dan resto 3. ¿Cuál entre todos es el número **natural** más pequeño?

Solución:

El problema plantea el siguiente sistema de ecuaciones en congruencias:

$x \equiv 0 \bmod 11$

$x \equiv 1 \bmod 2$

$x \equiv 3 \bmod 5,$

que se resuelve usando la teoría vista en clase (teorema Chino de los restos) dando como conjunto solución: $\{253 + K110 | K \in \mathbb{Z}\}$*. Así, la menor solución natural es* 33 *(para* $K = -2$*).*