Matemática Discreta. ITIG+LADE

Examen parcial. *Fecha:* 16 de diciembre de 2004

El examen está formado por tres problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre cinco puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

No está permitido el uso de calculadoras.

Problema 1. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$2^{2^n} \equiv 6 \bmod 10.$$

Lo demostramos por inducción. La base de inducción es $n = 2$. En este caso $2^4 = 16 \equiv 6 \bmod 10$ como queríamos demostrar. Para el paso de inducción observamos que $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2$. Por hipótesis de inducción se tiene que $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 \equiv 6^2 \bmod 10$. Se concluye el ejercicio sin más que observar que $6^2 = 36 \equiv 6 \bmod 10$.

Problema 2. Diseñar un algoritmo que tenga como entrada dos listas de números enteros, digamos a_1, ..., a_n y b_1, ..., b_m, y obtenga como salida una lista de longitud $n + m$ resultado de añadir al final de la primera lista los elementos de la segunda. Definir adecuadamente el tamaño de la entrada y calcular la complejidad del algoritmo.

Entrada: a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_m
    For $i = 1$ to m
        $a_{n+i} := b_i$
Salida: a_1, ..., a_{n+m}

Resulta natural considerar m el tamaño de la entrada y el algoritmo presentado es lineal en m, esto es, de complejidad $O(m)$ ya que tiene un sólo bucle con m repeticiones.

Problema 3. En una cesta hay caramelos de 3 sabores. Concretamente hay 50 caramelos de fresa, 20 de menta y 45 de café. Determinar cuál es la probabilidad de que, al extraer tres caramelos al azar:

3.1) los tres sean del mismo sabor.

3.2) los tres caramelos sean de sabores diferentes.

3.1) Sea S el suceso: *los tres son del mismo sabor*. Sean los sucesos S_1, S_2 y S_3 definidos respectivamente: *los tres son de fresa*, *los tres son de menta* y *los tres son de café*. Entonces $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ y claramente los sucesos S_i $(1 \leq i \leq 3)$ son disjuntos, de modo que:

$$P(S) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3).$$

Ahora por la regla de Laplace obtenemos que

$$P(S_1) = \binom{50}{3} \Big/ \binom{50+20+45}{3},$$

$$P(S_2) = \binom{20}{3} \Big/ \binom{50+20+45}{3},$$

$$P(S_3) = \binom{35}{3} \Big/ \binom{50+20+45}{3}.$$

3.2) Supongamos que extraemos los caramelos por orden, entonces la probabilidad de obtener, por ejemplo: *fresa, menta, café* es:

$$\frac{50}{115}\frac{20}{114}\frac{45}{113}.$$

Esta probabilidad ha de multiplicarse por 6, que corresponde a las distintas formas de obtener los tres sabores.

3.3) *Al menos uno sea de fresa* es el suceso complementario al suceso ninguno sea de fresa. Entonces como hay 65 caramelos que no son de fresa, la probabilidad buscada es:

$$1 - \frac{\binom{65}{3}}{\binom{115}{3}}.$$