Matemática Discreta

HOJA 5 RESUELTA

1) Considérese el grafo de la Figura 1.

i) Describir formalmente el grafo, esto es, dar el conjunto de sus vértices y aristas.

ii) Hallar el grado de cada vértice.

iii) Comprobar que se verifica el teorema siguiente:

La suma de los grados de todos los vértices de un grafo es igual al doble del número de aristas.

i) El grafo tiene 5 vértices, se puede considerar el conjunto de vértices

$$V = \{a, b, c, d, e\}.$$

El grafo tiene siete aristas. El conjunto de aristas es entonces

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}\}.$$

ii) El grado de cada vértice es igual al número de aristas incidentes con él:

$$gr(a) = 3, gr(b) = 3; gr(c) = 4, gr(d) = 2, gr(e) = 2.$$

iii) La suma de los grados de los vértices es, efectivamente, igual a dos veces el número de aristas:

$$3 + 3 + 4 + 2 + 2 = 14 = 2 \times 7.$$

2) Un campeonato de tenis se realiza mediante un sistema circular, esto es, cada jugador ha de enfrentarse a todos los restantes en un partido. Representamos cada jugador por un vértice. Si dos jugadores se han enfrentado ente sí, entonces unimos los vértices correspondientes por una arista. De esta forma se obtiene el grafo de partidos disputados hasta un cierto momento.

Estudiar el grafo obtenido para mostrar que en cualquier momento existen dos jugadores que han disputado el mismo número de partidos.

Para demostrar que existen dos jugadores que han disputado el mismo número de partidos, hay que verificar que, en el grafo de encuentros, existen dos vértices cuyos grados son iguales.

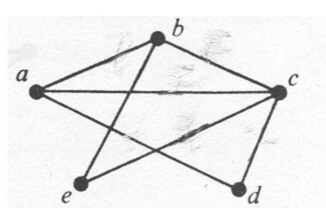

FIGURA 1. Ejercicio 1

Supongamos lo contrario. Tenemos entonces un grafo $H = (V, E)$ de n vértices tal que los grados de todos los vértices son diferentes. Obsérvese que, para cada $v \in V$, se tiene

$$0 \leq gr(v) \leq n - 1.$$

Por tanto hay n posibles valores distintos para los grados. Como hay n vértices y todos ellos tienen grados distintos, debe existir $v \in V$ tal que $gr(v) = 0$ y $v' \in V$ tal que $gr(v') = n - 1$. Esto da una contradicción pues v' y v deben ser adyacentes.

3) Indicar cuáles de los grafos de la Figura 2 son:
i) Conexos. Si no lo son, determinar el número de componentes conexas.
ii) Libres de bucles (no tiene bucles).
iii) Verifican la definición de grafo simple.
iv) No contienen ningún subgrafo isomorfo a un ciclo.

i) Los grafos (i) y (iii) son conexos. Los grafos (ii) y (iv) tienen dos componentes conexas.
ii) Sólo (iv) tiene un bucle.
iii) Sólo (i) u (ii) son grafos simples. El grafo (iii) tiene aristas múltiples y el (iv) tiene aristas múltiples y un bucle.
iv) El grafo (ii) contiene un subgrafo isomorfo a C_3, el grafo (iii) contiene subgrafos isomorfos a C_3 y subgrafos isomorfos a C_4.

4) Hallar una matriz de adyacencias $A = (a_{ij})$ y una matriz de incidencias $M = (m_{ij})$ del grafo de la Figura 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

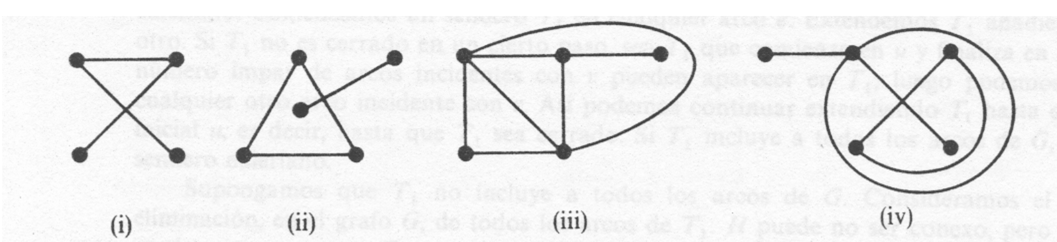

FIGURA 2. Ejercicio 3

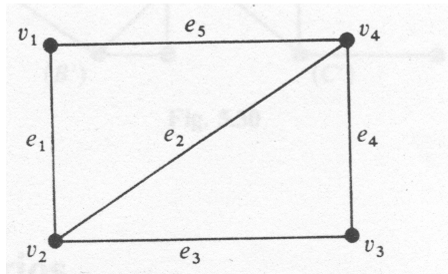

FIGURA 3. Ejercicio 4

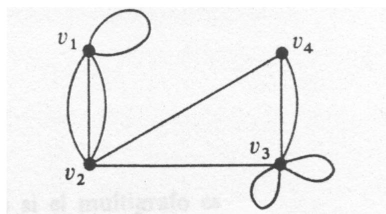

FIGURA 4. Ejercicio 5

5) Representa gráficamente el multigrafo G cuya matriz de adyacencias $A = (a_{ij})$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizar el criterio de conexión basado en las potencias de la matriz A para determinar que G es conexo.

La matriz de adyacencias A tiene tamaño 4×4, por tanto el grafo tiene cuatro vértices $V = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$. Hay que dibujar n aristas desde ν_ia ν_j si $a_{ij} = n$. Nótese que el vértice ν_i tiene n bucles si $a_{ii} = n$. Obtenemos entonces el grafo de la Figura 4.

Basta tomar A^2 y observar que todas sus entradas son no nulas. Esto es, cada par de vértices está unido por un camino de longitud 2.

6) Representar gráficamente todos los árboles con cinco vértices o menos, salvo isomorfismo.

Existen los ocho árboles de la Figura 5.

7) En un torneo de tenis por equipos, cada jugador del equipo azul se enfrenta a cada jugador del equipo verde. El número de jugadores en cada equipo es menor o igual que ocho (los dos equipos tienen el mismo número de jugadores). Los azules ganaron un número de partidos 4 veces mayor que el de los verdes. ¿Cuántos jugadores hay en cada equipo?

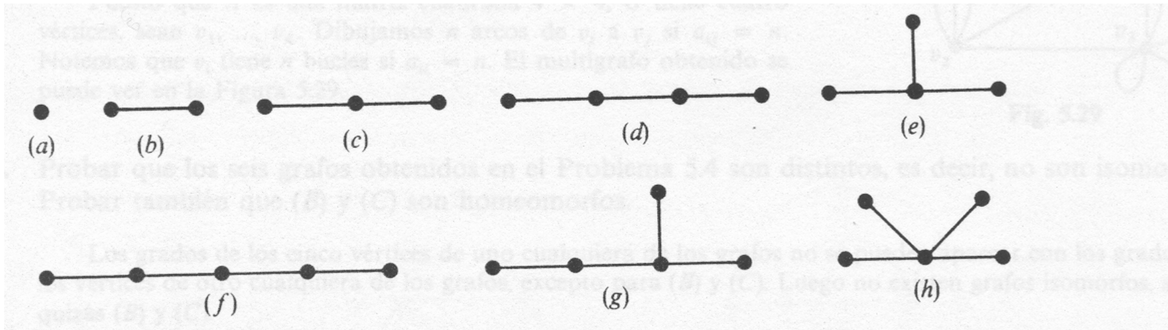

Figura 5. Ejercicio 6

Un grafo (V, E) cuyo conjunto de vértices V se puede separar en dos conjuntos disjuntos, $V = V_1 \cup V_2$, de tal forma que cada arista une un vértice de V_1 con uno de V_2, se dice que es *bipartido*. Además se dice que es *bipartido completo* si para cada $v_1 \in V_1$ y para cada $v_2 \in V_2$ se tiene que v_1 y v_2 son adyacentes. Si tenemos un grafo bipartido completo con $|V_1| = p$ y $|V_2| = q$, lo denotamos $K_{p,q}$.

Sea V el conjunto de jugadores. Entonces $V = V_1 \cup V_2$, donde V_1 es el conjunto de jugadores del equipo azul y V_2 el conjunto de jugadores del equipo verde. El grafo de partidos es el grafo completo $K_{n,n}$ ($|V_1| = |V_2| = n$) que tiene n^2 aristas. Si el partido lo gana un jugador azul, dibujamos la arista de color azul. Si gana un jugador verde, dibujamos la arista de color verde. Denotamos por x el numero de aristas verdes. El número de aristas azules es $4x$. El grafo $K_{n,n}$ tiene n^2 aaristas, luego $4x + x = n^2$, o equivalentemente

$$5x = n^2.$$

Como $0 < n \leq 8$ entonces, en el conjunto de los 8 primeros números al cuadrado, sólo 5^2 es múltiplo de 5. De este modo $x = n = 5$.