Matemática Discreta

SOLUCIONES DEL EXAMEN FINAL

Septiembre 2004

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (tarde) y de Gestión

---

Ejercicio 1: (12 puntos)
Demuestra por inducción que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$2^{2^n} \equiv 6 \quad mod\, 10.$$

Solución:
Base de inducción: Para $n = 2$

$$2^{2^2} = 2^4 = 16 \equiv 6 \quad mod\, 10.$$

Paso de inducción: Si $2^{2^n} \equiv 6 \quad mod\, 10$,

$$2^{2^{(n+1)}} = 2^{2 \cdot 2^n} = (2^{2^n})^2 \equiv 36 \quad mod\, 10 \equiv 6 \quad mod\, 10.$$

Ejercicio 2: (13 puntos) Escribe en pseudocódigo un algoritmo que verifique si un número a, cuya expresión binaria es $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$, es múltiplo de 2 o de 4. Calcula la complejidad de tu algoritmo.

Solución:
ENTRADA: $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$
$s := 0$
If $a_0 = 0$ then
  If $a_1 = 0$ then $s := es\, múltiplo\, de\, 4$ else $s := es\, múltiplo\, de\, 2$
If $s = 0$ then $s := no\, es\, múltiplo\, de\, 2\, o\, de\, 4$
SALIDA: s

La complejidad del algoritmo anterior es constante, ya que para todo número binario a se realiza, en el peor de los casos, el mismo número de operaciones.

Ejercicio 3:

a) (7 puntos) Determina todos los valores del número entero $n \geq 3$ tales que los números $4n - 11$ y $3n - 8$ sean primos entre sí.

b) (8 puntos) Unos amigos están decidiendo como pasar la noche. Se dan cuenta que no pueden participar a un certamen de baile en pareja ya que uno de ellos se quedaría sólo. Entonces deciden ir a jugar a los bolos dividiéndose en equipos. Calculan que los equipos no pueden ser todos de tres personas, ya que se quedaría un equipo con sólo dos de ellos, y tampoco pueden ser todos de cinco jugadores, ya que se quedaría un equipo con sólo cuatro personas. ¿Cuántos amigos hay en este grupo?

Solución:

a) Ya que si $n = 3 \quad 4n - 11 = 1 = 3n - 8$ y si $n > 3$

$$4n - 11 = (3n - 8) + (n - 3)$$

$$3n - 8 = 3(n - 3) + 1$$

$$n - 3 = (n - 3) + 0,$$

Los números $4n - 11$ y $3n - 8$ son primos entre si para todo entero $n > 3$.

b) Sea x el número de amigos en el grupo. Se trata de hallar las soluciones positivas del siguiente sistema de ecuaciones de congruencia:

$$\begin{cases} x & \equiv 1 \quad mod\, 2 \\ x & \equiv 2 \quad mod\, 3 \\ x & \equiv 4 \quad mod\, 5. \end{cases}$$

Ya que $2, 3$ y 5 son primos entre si dos a dos, podemos usar el teorema chino de los restos:

$$P_1 = \frac{30}{2} = 15, \quad , P_2 = \frac{30}{3} = 10, \quad P_3 = \frac{30}{5} = 6,$$

$$15\, q_1 \equiv 1 \quad mod\, 2, \quad 10\, q_2 \equiv 1 \quad mod\, 3, \quad 6\, q_3 \equiv 1 \quad mod\, 5.$$

Así que

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1$$

y

$$x = (15 + 20 + 24) + 30k = 29 + 30k \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Entonces hay un número mínimo de 29 amigos en el grupo del problema y, más en general, un número de amigos igual a 29 más un múltiplo positivo de 30.

Ejercicio 4: Contesta las siguientes preguntas:

a) (5 puntos)¿Cuántas palabras binarias distintas de 5 bits contienen o tres unos seguidos o tres ceros seguidos?

b) (5 puntos) En un polígono convexo una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos. ¿Cuál es el número de diagonales de un polígono convexo de N lados?

Solución: a) Empezaríamos por contar las que tienen tres unos seguidos. Dichas cadenas pueden ser de la forma $111**, *111*$ *ó* $**111$. *Claramente, hay* 2^2 *cadenas de cada tipo. Además, las cadenas de la forma* $1111*$ *son de dos de los tipos considerados antes (luego estamos contando esas cadenas dos veces), y lo mismo ocurre con las cadenas de la forma* $*1111$ *(observa que, de hecho, la cadena* 1111 *se cuenta 3 veces). Por tanto, en total hay* $32^2 - 2^2 = 8$ *cadenas distintas con tres unos seguidos. Análogamente, hay 8 cadenas distintas con tres ceros seguidos. Como ninguna cadena de 5 bits puede a la vez tener 3 unos y 3 ceros seguidos, el resultado es* $8 + 8 = 16$.

b) En total, hay $\binom{N}{2}$ *pares de vértices en el polígono. De esos pares, exactamente* N *están formados por vértices consecutivos, luego la solución es* $\binom{N}{2} - N$.

Ejercicio 5: En un edificio se tienen nueve oficinas numeradas del 1 al 9 y seis ordenadores identificados con las letras A, B, C, D, E y F. Los ordenadores han ido moviéndose por las oficinas de modo que, en cada momento, había exactamente dos ordenadores a la vez en cada oficina, según la disposición que se deduzca de los siguientes hechos:

1. El ordenador A sólo ha estado:
    - junto con B en las oficinas 6 y 7
    - junto con F en la oficina 1
    - junto con C en la oficina 5

2. Las oficinas 8 y 9 sólo han tenido en común el ordenador B.

3. El ordenador C sólo ha estado en dos oficinas.

4. El ordenador D sólo ha estado:

   - junto con C en la oficina 4
   - junto con E en la oficina 3

5. En la oficina 2 han estado, simultáneamente, los ordenadores E y F.

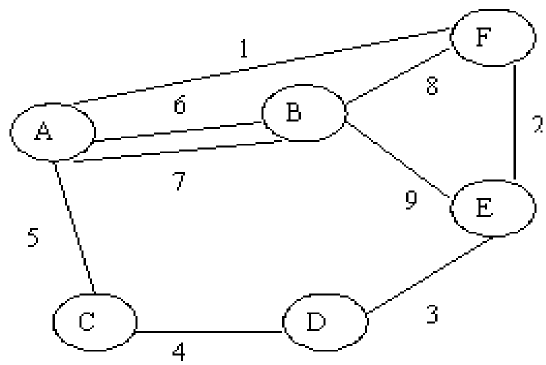
6. El ordenador E ha estado en la oficina 9.

a)(2 puntos) Dibujar el grafo asociado al problema (pista: considerar que cada oficina sirve de 'enlace' entre dos ordenadores).

b) Considerar la siguiente estrategia para inventariar los ordenadores: etiquetamos un ordenador, a continuación nombramos una de las oficinas que lo haya tenido, despúes nombramos otro ordenador que haya estado en la misma oficina y así sucesivamente, de manera que vayamos formando una cadena de la forma $Ordenador_1 Oficina_1 Ordenador_2 Oficina_2 ....$ con la única condición de que $Ordenador_i \neq Ordenador_{i+1}$.

- (4 puntos) ¿Será posible con la estrategia anterior enumerar sin repetición todas las oficinas? ¿Por qué?
- (4 puntos) En caso afirmativo, obtener dicha enumeración por un procedimiento algorítmico.

Solución: a) El grafo natural que se deriva del planteamiento es el siguiente:



b) Lo que en realidad se pide es un camino que recorra todos los arcos del grafo, cada uno exactamente una vez, i.e., un camino euleriano. Existirá, pues un camino euleriano abierto por tener exactemente dos vértices de grado impar. Para encontrar el camino, puede usarse el algoritmo que se deriva del teorema de Euler añadiendo un arco ficticio entre los vértices E y F. Un camino posible es 1234568 *falso* 97, *de donde el camino abierto sería:* 975432168.

Ejercicio 6: Sea el conjunto

$$\mathbb{N}_{13} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}.$$

y considerar la relación $\mathcal{R}$ definida por $a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a$ divide a b.

a) (2 puntos) Representa de dos maneras distintas la relación anterior

b) (4 puntos) Estudia qué propiedades cumple la relación (reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva).

c) (4 puntos) ¿Es una relación de orden total? ¿Es una relación de equivalencia?

Solución: a) Valdría por ejemplo la representación mediante el digrafo asociado a la matriz:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

así como mediante la tabla:

$$\begin{array}{|ccccccccccccc}
x & & & & & & & & & & & & x \\
x & x & x & x & & x & & & & & & x & \\
x & & & & & & & & & & x & & \\
x & x & & & x & & & & & x & & & \\
x & & x & & & & & & x & & & & \\
x & x & & x & & & & x & & & & & \\
x & & & & & & x & & & & & & \\
x & x & x & & & x & & & & & & & \\
x & & & & x & & & & & & & & \\
x & x & & x & & & & & & & & & \\
x & & x & & & & & & & & & & \\
x & x & & & & & & & & & & & \\
x & & & & & & & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

b) Se cumple la propiedad reflexiva (ya que un número siempre se divide a si mismo). No cumple la propiedad simétrica (por ejemplo, $1\mathcal{R}2$ y no $2\mathcal{R}1$) y sí la antisimétrica, pues si un número divide a otro y éste a él, siendo ambos mayores que cero, necesariamente ambos coinciden: si a divide a b, existe un c tal que $a = bc$, si además $b = a\hat{c}$, necesariamente, $a = a\hat{c}c$ y como todos son positivos, necesariamente $c = \hat{c} = 1$. La propiedad transitiva también se cumple: si $a = a'b$ y $b = b'c$, claramente $a = a'b'c$.

c) Es una relación de orden, pero no total (pues, por ejemplo, no podemos relacionar el 11 *con el* 2*.) No es una relación de equivalencia, por no ser simétrica.*