Relaciones de Recurrencia

Elvio Accinelli

Abstract

Estas notas no pretenden ser más que una sugerencia para el comienzo del tema Relaciones de Recurrencia. En realidad es el esquema de como pienso abordar el tema en la semana que corresponde al tema en el curso de Matemática Discreta 1. Espero vuestras sugerencias y siempre pueden dejar estas notas de lado si tienen alguna idea mejor.

1 Introducción

En su forma general, una **Relación de Recurrencia de orden k,** es una ecuación de la forma:

$$F : R^k \times R \to R$$

definida como:

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}, n);\ \forall n \geq k$$

Diremos que la relación de recurrencia es con **Condiciones Iniciales** dadas si conjuntamente con la ecuación se definen los k valores iniciales: $a_0 = \alpha_0, ..., a_{k-1} = \alpha_{k-1}$.

En el curso abarcaremos poco más que las llamadas Relaciones de Recurrencia Lineales con Coeficientes Constantes, esto es relaciones del tipo:

$$P_k(a) = c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + ... + c_{n-k}a_{n-k} = f(n), \tag{1}$$

donde:

i) cada $c_{n-i} \in\ R\ \ \forall i = 0, 1, 2, ...k$ y $c_n \neq 0$,

ii) $k \in Z^+$ determina el orden de la relación y debe ser $n \geq k$

iii) $f : N \to C$ es una función dada. Si $f(n) = 0\ \forall n \in N$ diremos que la relación de recurrencia es homogénea, no homogénea en otro caso, y de orden k

iv) $a : N \to C$ es una función discreta definida como $a(n) = a_n$

Nuestro objetivo es encontrar a que resuelva 1.

A los efectos de ayudar a la intuición daremos un ejemplo sencillo:

Ejemplo 1.1

$$a_n - 3a_{n-1} = 0,\ n \geq 1.$$

Tenemos que $c_n = 1, c_{n-1} = -3;\ k = 1;\ f(n) = 0$. *La relación define entonces, una* ecuación en diferencias finitas *homogénea de primer orden.*

Resolver la ecuación, es decir encontrar a es en este caso sencillo. Basta ver que a partir de

$$a_n = 3a_{n-1}$$

obtenemos para $n = 1, n = 2$, etc.. las ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} a_1 = & 3a_0. & & \\ a_2 = & 3a_1 = & 3^2 a_0. & \\ a_3 = & 3a_2 = & 3^2 a_1 = & 3^3 a_0. \\ \ldots & \ldots.. & \ldots.. & \ldots \\ a_n = & 3a_{n-1} = & \ldots.. = & 3^n a_0. \end{array}$$

Como se ve obtenemos infinitas soluciones, definidas por $a_n = 3^n a_0$ (verificarlo por inducción completa) dependiendo todas ellas de los valores dados a a_0. Naturalmente, si inicialmente a_0 es dado, obtendremos una única solución. Por ejemplo supongamos que por algún motivo deseamos encontrar la solución que satisface $a_0 = 5$ en este caso la UNICA solución será la definida por $a_n = 3^n 5$.

Con un poco más de generalidad consideremos la ecuación:

Ejemplo 1.2

$$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0; n \geq 2.$$

Tenemos: $c_n = 1, c_{n-1} = 1, c_{n-2} = -6;\ k = 2$. *La ecuación es en este caso homogénea de orden 2.*

Procediendo como en el ejemplo anterior obtenemos:

$$\begin{array}{llll} n = 2 & a_2 + a_1 - 6a_0 = 0 & \rightarrow & a_2 = -a_1 + 6a_0 \\ n = 3 & a_3 + a_2 - 6a_1 = 0 & \rightarrow & a_3 + a_2 = 6a_1 \rightarrow a_3 = 7a_1 - 6a_0. \end{array}$$

Como puede verse la solución quedará dependiendo de a_0 *y* a_1. Aunque como puede verse es posible construir la solución recurrentemente no es tan sencillo explicitarla como en el caso anterior. La situación se complica en la medida en que k aumenta, aunque el método recursivo siga valiendo es cada vez menos convincente el procedimiento aquí seguido para explicitar la solución.

2 Algunas consideraciones previas a la resolución

Consideremos la ecuación homogénea de grado k definida por:

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_n x_{n-i} = 0; \; n \geq k, \tag{2}$$

Supongamos que las funciones

$$a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...) \;\; y \;\; b = (b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...)$$

son soluciones de 2, entonces como es fácil verificar: la función $s : N \to C$ definida como $s = \alpha_1 a + \alpha_2 b$ con valores $s(n) = \alpha_1 a(n) + \alpha_2 b(n)$, es también solución de la ecuación 2.

Así podemos decir que el conjunto de soluciones de $P_k(x) = 0$ forman un S.E.V. dentro del espacio de las funciones discretas con la suma y el producto por escalares definidas como anteriormente.

Consideremos nuevamente la ecuación 2, pero supongamos ahora que están fijados los k primeros valores de las posibles soluciones, sean estos valores $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$, (los llamaremos Condiciones Iniciales). El método recursivo ensayado en los ejemplos anteriores, permite obtener las solución definida recurrentemente a partir de la igualdad:

$$x_k = -\frac{c_{k-1}}{c_k} x_{k-1} - \cdots - \frac{c_0}{c_k} x_0$$

Veremos que es posible obtener esta solución como una combinación lineal particular de las soluciones de los k problemas definidos por 2 y respectivamente las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{array}{cccc} a_0 = 1, & a_1 = 0 & \ldots & a_{k-1} = 0 \\ a_0 =, & a_1 = 1 & \ldots & a_{k-1} = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 = 0, & a_1 = 0 & \ldots & a_{k-1} = 1 \end{array}$$

Sean $a^{(0)}; a^{(1)}; ...a^{(k-1)}$ las soluciones de estos problemas (CUIDADO: no son potencias). Como podemos verificar estas soluciones son L.I.

Por otra parte

$$S = \alpha_0 a^0 + \alpha_1 a^1 + \ldots \alpha_{k-1} a^{k-1}$$

es solución de

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_{n-i} x_{n-i} = 0; \; n \geq k,$$

con las condiciones iniciales: $a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1, \ldots, a_{k-1} = \alpha_{k-1}$.

Por lo tanto el problema de resolver

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_n x_{n-i} = 0; \quad n \geq k,$$

con condiciones iniciales dadas, es equivalente a encontrar k funciones discretas linealmente independientes $f_j(n); j = 0, 1, 2, ..., k-1$, y luego resolver

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{k-1} b_j f_j(i); \; i = 0, 1, 2, ..., (k-1),$$

hallados los b_j a partir de este sistema de ecuaciones la solución al problema con condiciones iniciales dadas será:

$$x(n) = \sum_{j=0}^{k-1} b_j f_j(n).$$

Presentaremos a continuación una forma de resolución de ecuaciones en diferencias homogéneas con condiciones iniciales dadas, el que es una continuación natural de las ideas anteriores. Si bien en casos relativamente sencillos éste método es de valor pierde eficiencia en casos más generales. Por este motivo más adelante presentaremos un método de resolución basado en las funciones generatrices, el que permite obtener soluciones para una amplia clase de problemas, en éste método haremos especial hincapié.

3 Un método para obtener la solución

Discutiremos a partir de un ejemplo una forma especial de resolución y veremos en el práctico diferentes casos particulares. En la sección siguiente nos dedicaremos a la resolución de ecuaciones en diferencias mediante la utilización de funciones generatrices.

Comencemos observando que k funciones del tipo $f_j(n) = r_j^n, j = 1, 2, ..., k$ pueden formar para $r_j \neq r_i, \; i \neq j$ un conjunto linealmente independiente de funciones.

Ejemplo 3.1 *Consideremos la ecuación en diferencias:*

$$x_n + x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0$$

con condiciones iniciales: $a_0 = 1, a_1 = 3$

Busquemos soluciones del tipo $f(n) = cr^n$. Precisamos dos soluciones de este tipo L.I. Vemos que $r = 2, r = -3$ son las soluciones, resolvamos ahora

$$\begin{array}{lll} 1 = a_0 & b_0(2)^0 + b_1(-3)^0 = & b_0 + b_1 \\ 3 = a_1 & b_0(2)^1 + b_1(-3)^1 = & 2b_0 - 3b_1 \end{array}$$

A partir de: $b_0 = \frac{6}{5}$, $b_1 = -\frac{1}{5}$ Obtendremos la solución:

$$a(n) = \frac{6}{5}2^n + \frac{1}{5}(-3)^n.$$

Demostrar que la solución encontrada es una C.L. de las soluciones de los casos $a_0 = 1, a_1 = 0$ y $a_0 = 0, a_1 = 1$

Ejemplo 3.2 *Samuelson hace los siguientes supuestos:*

- *El consumo es función lineal del ingreso:*

$$c_n = ay_{n-1} + H$$

- *la inversión líquida tiene una componente autónoma A y otra $b(c_n - c_{n-1})$*

$$i_n = A + b(c_n - c_{n-1})$$

- *los productores en todo período ajustan la oferta a la demanda:*

$$y_n = c_n + i_n$$

A partir de estos tres supuestos obtenemos la ecuación en diferencias:

$$y_n - a(1+b)y_{n-1} + aby_{n-2} = A + H.$$

La solución general es de la forma:

$$y_n = \frac{A+H}{1-a} + f(n)$$

Donde $f(n)$ es la solución de la ecuación homogénea, representará un ciclo si la ecuación $r^2 - a(a+b)r + ab = 0$ tiene raíces complejas, con amplitud decreciente, creciente o constante, según ab sea menor, mayor o igual a 1.

Ejemplo 3.3 *Considere un alfabeto compuesto por 3 símbolos :* $\{A, B, C\}$.

a) Obtenga la relación de recurrencia que determina el número de palabras diferentes de largo n, a_n. que pueden formarse si el símbolo B, no puede aparecer consecutivamente.

b) Obtenga a_n.

Sea a_{n+1} el número de palabras posibles que se pueden escribir de acuerdo al enunciado. En el enésimo lugar habrá una A, una B o una C, de estas forma

$$a_{n+1} = 3a_n^A + 3a_n^B + 2a_n^C \quad (*)$$

donde $a_n^j,\ j = A, B, C$ representa las palabras con n letras terminadas en j.

Si $j = A$ o $j = C$, estas palabras ya fueron contadas en a_{n-2}, por lo que sustituyendo en $(*)$ obtenemos:

$$a_{n+1} = 6a_{n-2} + 2a_n^C \quad (**)$$

Consideremos ahora las palabras con n letras, terminadas en B ($j = B$) en este caso en el lugar $n-2$ solo puede haber una A o una B en ambos casos estas fueron contadas al considerar a_{n-3}, sustituyendo ahora en $(**)$ concluimos con que:

$$a_{n+1} = 6a_{n-2} + 4a_{n-3}$$

4 Sistema de Ecuaciones

Consideremos el **sistema de ecuaciones en diferencias finitas homogéneo:**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} &= a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{aligned} \tag{3}$$

Suponemos $a_{12} \neq 0$ o $a_{21} \neq 0$.

Supongamos $a_{12} \neq 0$ de la primera ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} y_n = & \quad \tfrac{1}{a_{12}}x_{n+1} - \tfrac{a_{11}}{a_{12}}x_n \\ y_{n+1} = & \quad \tfrac{1}{a_{12}}x_{n+2} - \tfrac{a_{11}}{a_{12}}x_{n+1} \end{aligned}$$

Sustituyendo adecuadamente obtenemos la ecuación en diferencias:

$$x_{n+2} - (a_{11} + a_{12}x_{n+1} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_n = 0$$

Método alternativo: Busquemos soluciones del tipo: $x_n = \alpha_1 r^n$ e $y_n = \alpha_2 r^n$ con $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_2 \neq 0$.

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones original y simplificando obtenemos :

$$\alpha_1 r = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2$$

$$\alpha_2 r = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2$$

O en forma matricial:
$$\begin{bmatrix} r-a_{11} & -a_{12} \\ a_{11} & r-a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema posee solución no trivial (α_1, α_2) solamente si el determinante es igual cero, de donde obtenemos dos posibles valores para r, las raíces del polinomio característico: r_1 y r_2. Mientras que los valores (α_1, α_2) representan los autovectores asociados a los respectivos autovalores. Luego:

1. Si $r_1 \neq r_2$,las soluciones serán de la forma:

$$(x_n, y_n) = (k_1\alpha_1 r_i^n + k_2\alpha_2 r_2^n, h_1\alpha_1 r_i^n + h_2\alpha_2 r_2^n)$$

donde las constantes k_i y $h_i,\ i = 1, 2$, se determinan por las condiciones iniciales.

2. Si $r_1 = r_2$,las soluciones buscan en la forma:

$$x_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n)r_1^n$$

e

$$y_n = (\beta_0 + \beta_1 n)r_1^n.$$

Observe que (3) puede escribirse en la forma

$$v_{n+1} = Av_n$$

donde
$$v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \ \ y \ \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

La solución para este sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo se obtiene fácilmente pues iterando se llega a:
$$v_{n+1} = A^n v_0.$$

Obsérvese que el métod se extiende naturalmente a sistemas de orden k donde $v_n \in R^k$ y $A \in \mathcal{M}_{k\times k}$.

Consideremos ahora el caso de un **sistema de ecuaciones en diferencias no homogéneo:**

Sea: $x_n = Ax_{n-1} + y$ donde x_n y x_{n-1} son vectores k-dimensionales, y es un vector constante de dimensión k también. A es una matriz compleja $k \times k$.

Verificar que la solución para este problema es:

$$x_n = Ax_0 + (I + A + A^2 \cdots + A^{n-1})y$$

siendo x_0 el vector de condiciones iniciales.

4.1 Estabilidad

Definición Estabilidad: Se dice que el sistema $x_t = Ax_{t-1} + y$es estable cuando la solución x_t converge a un vector constante independientemente de x_0.

Teorema Para que el sistema $x_n = Ax_{n-1} + y$ sea estable es *necesario y suficiente* que todos los autovalores de A tengan módulo inferior a 1. Siendo el sistema estable, entonces converge a $(I - A)^{-1}y$.

Dem: Sean x_n y x'_n soluciones para el sistema con C.I.: x_0 x'_0 respectivamente. Observando que $x_n - x'_n = A^n(x_0 - x'_0)$.

Luego el sistema será estable sii $A^n \to 0$ sii todos los autovalores son de módulo menor que 1.

Recíprocamente: Suponga que todos los autovalores son de módulo menor que 1. Entonces $(I - A)$ es invertible. Como $(I - A)(I + A + A^2 \cdots + A^{n-1}) = I - A^n$ se sigue que:

$$(I + A + A^2 \cdots + A^{n-1}) = (I - A)^{-1}(I - A^n).$$

Luego como todos los autovalores de A son de módulo menor que 1, se sigue que $(I - A^n) \to I$ y por lo tanto $x_n = (I - A)^{-1}y$