Matemática Discreta I

Solución del Primer Parcial

27 de Setiembre de 2011

Nota: los ejercicios estaban en diferente orden en las diferentes versiones del parcial.

Ejercicio 1. Calcule la cantidad de palabras que se pueden formar permutando las letras de la palabra LENTAMENTE y que verifiquen simultáneamente las siguiente dos condiciones:

i. Comienzan y terminan en T.
ii. Contienen la palabra MAL en alguna parte.

Solución. Las palabras que nos sirven serán de la forma T. . .T donde en los puntos suspensivos va una permutación de las letras de la palabra LENAMENE. Como la palabra MAL tiene que aparecer en alguna parte por la condición ii, esto equivale a permutar de todas las formas posibles los símbolos E, E, E, N, N, MAL que son permutaciones con repetición de 6 donde hay un símbolo repetido tres veces y otro repetido dos veces así que en total hay

$$\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$$

palabras, y por lo tanto la respuesta correcta es 60.

Ejercicio 2. ¿De cuántas formas es posible asignar 24 computadoras a 4 líneas de montaje de modo tal que a cada línea se asignen al menos 3 computadoras pero no más de 9? (Las computadoras se suponen indistinguibles, pero las líneas de montaje no.)

Solución. Si x_i es la cantidad de computadoras que van a la i-ésima linea de montaje, el problema equivale a contar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$$

con la restricción $3 \le x_i \le 9$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Realizando el cambio de variable $y_i = x_i - 3$ para $i = 1, 2, 3, 4$, la ecuación puede escribirse como:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 12$$

con $y_i \le 6$, poniendo como condición $c_i : y_i \ge 7$ queremos contar $\overline{N}$, usando el Principio de Inclusión-Exclusión nos queda:

$$\overline{N} = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = C_3^{12+3} - 4C_3^{5+3} = C_{12}^{15} - 4C_5^{8}$$

donde en el último igual se usó que $C_m^n = C_{n-m}^n$ (se observa que $S_2 = S_3 = S_4 = 0$ pues no pueden darse dos o mas condiciones simultaneamente). O sea, la opción correcta es $C_{12}^{15} - 4C_5^8$.

Ejercicio 3. Sea a_n la cantidad de palabras de largo n cuyas letras son todas A, B, C, y que contienen un número par de letras A. Entonces a_5 es igual a: . . .

Solución. Hay a_{n+1} listas de largo $n+1$, las cuales pueden terminar en A, B ó C. Si termina en A, sus n primeras letras forman una palabra de largo n con una cantidad impar de A y por lo tanto hay $3^n - a_n$ de tales palabras (observar que 3^n es la cantidad de palabras totales de largo n que se pueden formar con 3 letras). Si termina en B, sus n primeras letras forman una palabra de largo n con una cantidad par de A y por lo tanto hay a_n posibilidades. El mismo razonamiento anterior es válido para las que terminan en C, habiendo también a_n de tales palabras. O sea en total tenemos que:

$$a_{n+1} = (3^n - a_n) + a_n + a_n = a_n + 3^n$$

que junto con la condición inicial $a_1 = 2$ tenemos que

$$a_n = 3^{n-1} + a_{n-1} = 3^{n-1} + 3^{n-2} + a_{n-2} = \ldots = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3^1 + a_1 = \frac{3^n - 1}{3 - 1} + 1$$

Por lo tanto con $n = 5$ resulta $a_5 = \frac{3^5-1}{2} + 1 = \frac{243-1}{2} + 1 = 121 + 1 = 122$. La opción correcta es 122.

Ejercicio 4. Consideramos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación $\mathcal{R}$ sobre A dada por

$$\mathcal{R} = \big\{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)\big\}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica pero no transitiva
- $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva
- $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica pero no transitiva
- $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva
- $\mathcal{R}$ es simétrica y transitiva, pero no reflexiva

Solución. Cada par $(i, i) \in \mathcal{R}$ para $i = 1, 2, 3, 4$ así que $\mathcal{R}$ es reflexiva. Los pares $(1, 2)$ y $(2, 3)$ están en $\mathcal{R}$, pero $(1, 3)$ no está, de modo que $\mathcal{R}$ no es transitiva. Como el par $(1, 2)$ está en $\mathcal{R}$, pero no $(2, 1)$, la relación no es simétrica. Finalmente, como $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset \Delta = \{(x, x) : x \in A\}$ tenemos que $\mathcal{R}$ es antisimétrica. Por lo tanto la opción correcta es que $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica pero no transitiva.

Ejercicio 5. Consideramos la función $f(x) = 1 + ax + bx^2$. Sabemos que $1/f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \cdots$. Entonces: $a + b = \cdots$

Solución. Por definición de función generatriz inversa las constantes a y b deben cumplir que:

$$(1 + ax + bx^2)(1 + 2x + 2x^2 + \cdots) = 1$$

realizando el producto (convolución) resulta:

$$1 + (2 + a)x + (2 + 2a + b)x^2 + \cdots = 1$$

Por lo tanto $2+a = 0$ de donde $a = -2$ y como $2+2a+b = 0$ resulta que $b = -2-2a = -2+4 = 2$ así que la respuesta correcta es $a + b = 0$.

Ejercicio 6. ¿Cuántas palabras de largo n se pueden formar utilizando solamente vocales y que contengan al menos una A y al menos una O?

Solución. Utilizando solamente las cinco vocales se pueden formar 5^n palabras distintas de largo n (arreglos de 5 letras con repetición). De estas, las que no contienen ninguna A son 4^n (porque son arreglos de 4 letras — las otras vocales). De la misma manera, las que no contienen ninguna O son 4^n. Finalmente, las palabras que no contienen ni A ni O son 3^n. Ahora, el principio de inclusión y exclusión nos permite calcular la cantidad de palabras que contienen al menos una A y al menos una O como

$$5^n - 4^n - 4^n + 3^n = 5^n - 2 \cdot 4^n + 3^n\ .$$

(De todas las palabras posibles, restamos las que no contienen A, restamos las que no contienen O, y como hemos restado dos veces las que no contienen ni A ni O, debemos sumarlas.) La respuesta correta es $5^n - 2 \cdot 4^n + 3^n$.

Ejercicio 7. Resolver la ecuación

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 4 \cdot 2^n \, , \qquad n \geq 0$$

con $a_0 = a_1 = 0$.

Solución. La ecuación característica asociada es $r^2 - 6\,r + 8 = 0$, que tiene raíces $r = 4$ y $r = 2$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_n^H = A \cdot 4^n + B \cdot 2^n \, .$$

El término independiente en la ecuación es $4 \cdot 2^n$; como este térmno es solución de la ecuación homogénea, debemos multiplicar por n para tener un candidato a solución particular:

$$C \cdot n\, 2^n \, .$$

Sustituyendo en la ecuación de recurrencia, y resolviendo encontramos que $C = -1$, resultando la solución particular

$$y_n^p = -n\, 2^n \, .$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación de recurrencia es

$$y_n = y_n^H + y_n^p = A \cdot 4^n + B \cdot 2^n - n \cdot 2^n \, .$$

Finalmente, sustituimos las condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 0$, concluyendo que $A + B = 0$ y que $4A + 2B = 2$, de donde $A = 1$, $B = -1$. Resulta entonces que la respuesta correcta es

$$a_n = 4^n - (n+1)\, 2^n \, .$$

Ejercicio 8. Demuestre por inducción completa que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)\, 2^k = n\, 2^{n+1}$$

Solución.
Paso base: cuando $n = 1$, debemos probar que

$$\sum_{k=1}^{1} (k+1)\, 2^k \stackrel{?}{=} 1 \cdot 2^{1+1}$$

La suma del lado izquierdo tiene un único término con $k = 1$ que es $(1+1)\, 2^1 = 4$. El lado derecho también es igual a 4, lo que demuestra el paso base.

Hipótesis de inducción: $\sum_{k=1}^{n} (k+1)\, 2^k = n\, 2^{n+1}$

Tesis de Inducción: $\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\, 2^k = (n+1)\, 2^{n+2}$

Para probar la tesis de inducción podemos escribir el lado izquierdo como

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\, 2^k = \underline{\left(\sum_{k=1}^{n} (k+1)\, 2^k \right)} + (n+2)\, 2^{n+1} \, .$$

Usando la hipótesis de inducción resulta

$$= \underline{\left(n\, 2^{n+1} \right)} + (n+2)\, 2^{n+1} \, ,$$

y simplificando:

$$\begin{aligned} &= n\, 2^{n+1} + (n+2)\, 2^{n+1} \\ &= (n+n+2)\, 2^{n+1} \\ &= 2\,(n+1)\, 2^{n+1} \\ &= (n+1)\, 2^{n+2} \end{aligned}$$

con lo que queda probada la tesis.