TEMA IV
TEORÍA DE GRAFOS

Poli Abascal Fuentes

TEMA IV

4. TEORÍA DE GRAFOS

4.1 GRAFOS

TEMA IV

4.2 ÁRBOLES

4.2.1 Árboles no dirigidos
4.2.2 Grafos con coste: búsqueda de un árbol generador minimal
4.2.3 Árboles dirigidos

4.3 REDES

4.3.1 Introducción
4.3.2 Modelos de redes
4.3.3 Un algoritmo de cálculo de flujo máximo
4.3.4 Teoría del emparejamiento

4. TEORÍA DE GRAFOS

Bibliografía

Rosen K.H.,
Matemática discreta y aplicaciones,
Editorial McGraw-Hill

Johnsonbaugh, R.,
Matemáticas discretas,
Prentice Hall

Grassman, W.K. and Tremblay, J.P.,
Matemática discreta y Lógica,
Prentice Hall

Grimaldi, R.P.,
Matemáticas discretas y combinatoria,
Prentice Hall

4.1 Grafos

4.1.1 Introducción

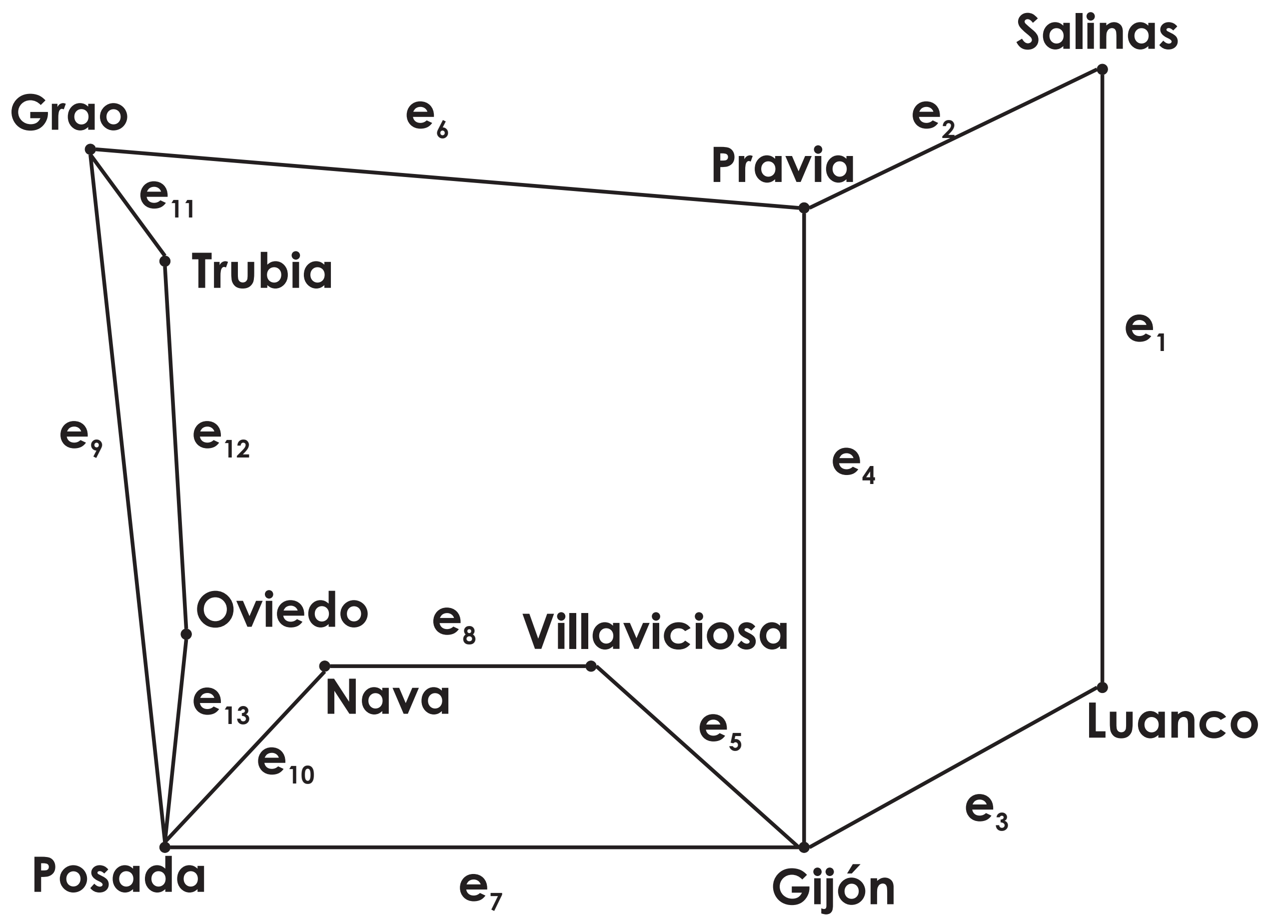


Figura 1: Grafo equivalente al Mapa de carreteras

4.1.2 Definiciones básicas

Definición 1 *Sea V un conjunto finito no vacío a cuyos elementos llamaremos **vértices** y sea E un conjunto de pares no ordenados de V a cuyos elementos llamaremos **aristas**, al par (V, E) le llamaremos **grafo no dirigido**.*

Si una arista $e \in E$ está asociada a los vértices v y w escribiremos $e = \{v, w\}$. Podría ocurrir que $v = w$.

Un vértice puede estar asociado a 0 aristas, pero toda arista une uno o dos vértices.

*Cuando dos vértices están asociados a una arista se dice que son **adyacentes**, y a ellos se les llama **extremos** de la arista.*

4.1.2 Definiciones básicas

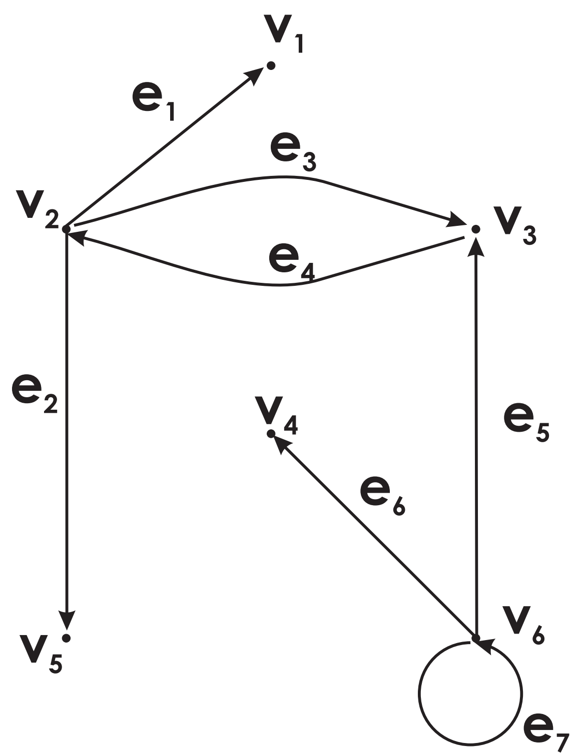
En el ejemplo anterior el conjunto de vértices sería

$V = \{$ Salinas, Luanco, Pravia, Gijón, Villaviciosa, Grado, Posada, Nava, Trubia, Oviedo$\}$

y el conjunto de aristas queda descrito a continuación:

$$e_1 = \{Salinas, Luanco\}$$
$$e_2 = \{Salinas, Pravia\}$$
$$e_3 = \{Gijón, Luanco\}$$
$$e_4 = \{Pravia, Gijón\}$$
$$e_5 = \{Villaviciosa, Gijón\}$$
$$e_6 = \{Grao, Pravia\}$$
$$e_7 = \{Posada, Gijón\}$$
$$e_8 = \{Nava, Villaviciosa\}$$
$$e_9 = \{Grao, Posada\}$$
$$e_{10} = \{Nava, Posada\}$$
$$e_{11} = \{Grao, Trubia\}$$
$$e_{12} = \{Trubia, Oviedo\}$$
$$e_{13} = \{Oviedo, Posada\}$$

4.1.2 Definiciones básicas



La asignación de vértices a aristas es la siguiente:

$$e_1 = (v_2, v_1)$$
$$e_2 = (v_2, v_5)$$
$$e_3 = (v_2, v_3)$$
$$e_4 = (v_3, v_2)$$
$$e_5 = (v_6, v_3)$$
$$e_6 = (v_6, v_4)$$
$$e_7 = (v_6, v_6)$$

La arista e_1 se asocia al par ordenado (v_2, v_1) y se dice que v_2 es el origen y v_1 el extremo.

La arista e_7 se asocia al par ordenado (v_6, v_6) y en este caso, el origen y el extremo coinciden. Se llama **lazo**.

4.1.2 Definiciones básicas

Definición 2 *Los grafos (dirigidos o no) que no tienen lazos ni más de una arista adyacente al mismo par de vértices se llaman **grafos simples***

Definición 3 *Un **grafo completo**, K_n, con n vértices es un grafo simple no dirigido en el que existe una arista uniendo cada par de vértices distintos.*

Definición 4 *Un grafo con n vértices y dirigido se dice **grafo dirigido completo** cuando es simple y para cada par de vértices u, v existe exactamente una de las aristas (u, v) ó (v, u). A dichos gráficos se les denota por K_n^*.*

4.1.2 Definiciones básicas

Definición 5 *Un grafo $G = (V, E)$ diremos que es un **grafo bipartido** si se puede dividir el conjunto de vértices en dos subconjuntos $V = V_1 \cup V_2$, tales que son disjuntos, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, y cada arista de E es incidente en una de V_1 y una de V_2.*

Definición 6 *Un grafo bipartido se dice que es completo si cada vértice de V_1 está unido con cada vértice de V_2. En este caso, si $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, el grafo obtenido se denota con $K_{m,n}$*

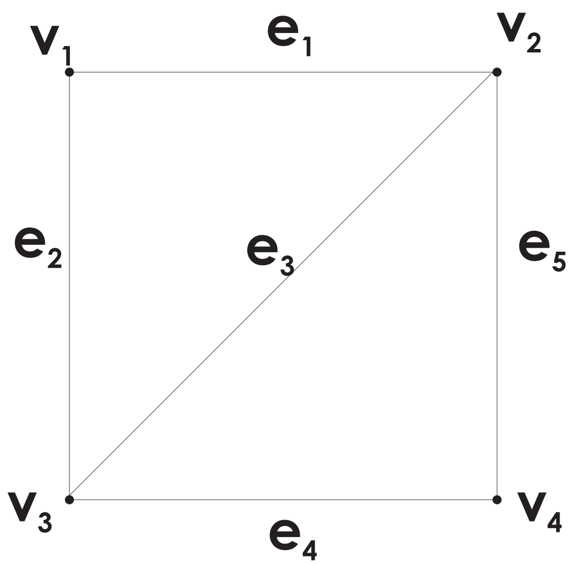
Definición 7 *Dado un grafo $G = (V, E)$, con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $E = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, se llama **matriz de adyacencia** a una matriz $A(G) = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ tal que:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe una arista que une } v_i \text{ y } v_j \\ 0 & \text{si no existe arista entre } v_i \text{ y } v_j \end{cases}$$

4.1.2 Definiciones básicas

EJEMPLO

Obtener la matriz de adyacencia del grafo de la figura



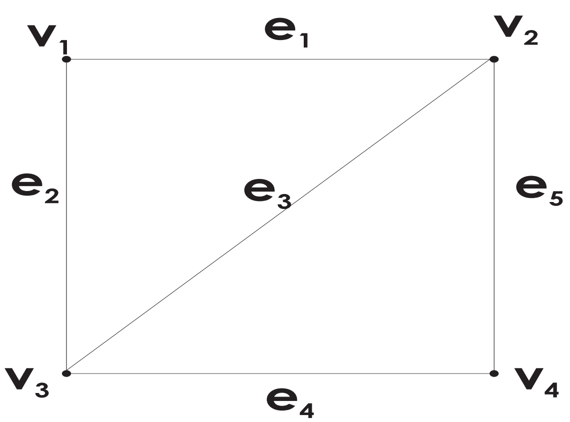
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1.2 Definiciones básicas

Definición 8 *Dado un grafo G con vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y aristas $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$, se llama* ***matriz de incidencia*** *a una matriz $M(G)$ de n filas y p columnas cuyos elementos son:*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e_j \text{ incide en el vértice } v_i \\ 0 & \text{si la arista } e_j \text{ no incide en el vértice } v_i \end{cases}$$

EJEMPLO: Calcúlese la matriz de incidencia del grafo de la figura



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1.3 Caminos y recorridos

Definición 9 *Sean v y w dos vértices de un grafo no dirigido, no necesariamente distintos, un* ***camino*** *en G es una sucesión de vértices y aristas:*

$$v = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n = w$$

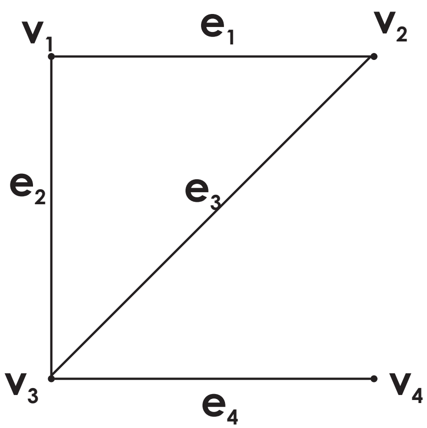
tal que los extremos de la arista e_i son los vértices v_{i-1} y v_i, $\forall i = 1, ..., n$.
Si el grafo es simple, dado que la arista que une dos vértices es única, se suele escribir sólo la sucesión de vértices,

$$v = v_0, v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n = w$$

Al número n de aristas se le llama ***longitud del camino****, a v y w se les llama extremos del camino, y a los vértices v_i con $i = 1, ..., n-1$ vértices interiores del camino.*
Cuando $v = w$ se dice que es un ***camino cerrado****.*

4.1.3 Caminos y recorridos

EJEMPLO



Un camino, por ejemplo, sería la sucesión:

$$v_1, e_2, v_3, e_4, v_4$$

que tiene longitud 2 y extremos v_1 y v_4.
Un camino puede repetir aristas o vértices. Otro camino posible sería:

$$v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_4, v_3, e_2, v_1$$

de longitud 4. Sus extremos son v_2 y v_1.

4.1.3 Caminos y recorridos

Teorema 0.1 *Si A es la matriz de adyacencia de un grafo simple la entrada i, j de la matriz A^n es igual al número de caminos de longitud n que existen entre el vértice i y el vértice j.*

Definición 10 *Dado un camino de extremos v y w, en un grafo no dirigido (V, E), si no se repite ninguna arista diremos que es un **recorrido**.*
*Un recorrido cerrado, es decir, un recorrido tal que $v = w$ será un **circuito**.*
*Cuando ningún vértice del grafo se repite en un camino, se dice que es un **camino simple**.*
*Si el único vértice que se repite es el extremo se dice **ciclo** o **camino simple cerrado**.*

4.1.3 Caminos y recorridos

RESUMEN

Vértices repetidos	**Aristas repetidas**	**Abierto**	**Nombre**
Sí	Sí	Sí	Camino
Sí	Sí	No	Camino cerrado
Sí	No	Sí	Recorrido
Sí	No	No	Circuito
No	No	Sí	Camino simple
No	No	No	Ciclo

4.1.3 Caminos y recorridos

Teorema 0.2 *Sea* (V, E) *un grafo no dirigido, y* v *y* w *vértices distintos del mismo, entonces si existe un recorrido de* v *a* w *también existe un camino simple de* v *a* w

Demostración
Se trata de eliminar los ciclos incluidos en el recorrido.

4.1.4 Subgrafos, complementos e isomorfismos de grafos

Definición 11 *Dado un grafo $G = (V, E)$, (dirigido o no) diremos que el par $G' = (V', E')$ es un* ***subgrafo*** *si es un grafo y $E' \subseteq E$ y $\emptyset \neq V' \subseteq V$.*

Definición 12 *Si $G = (V, E)$ es un grafo y $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos subgrafos suyos, se define la* ***unión*** *de los grafos como sigue:$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ y se define la* ***intersección*** *como $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$, siempre que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.*

4.1.4 Subgrafos, complementos e isomorfismos de grafos

EJEMPLO

La figura nos presenta un grafo G y un subgrafo suyo G_1.

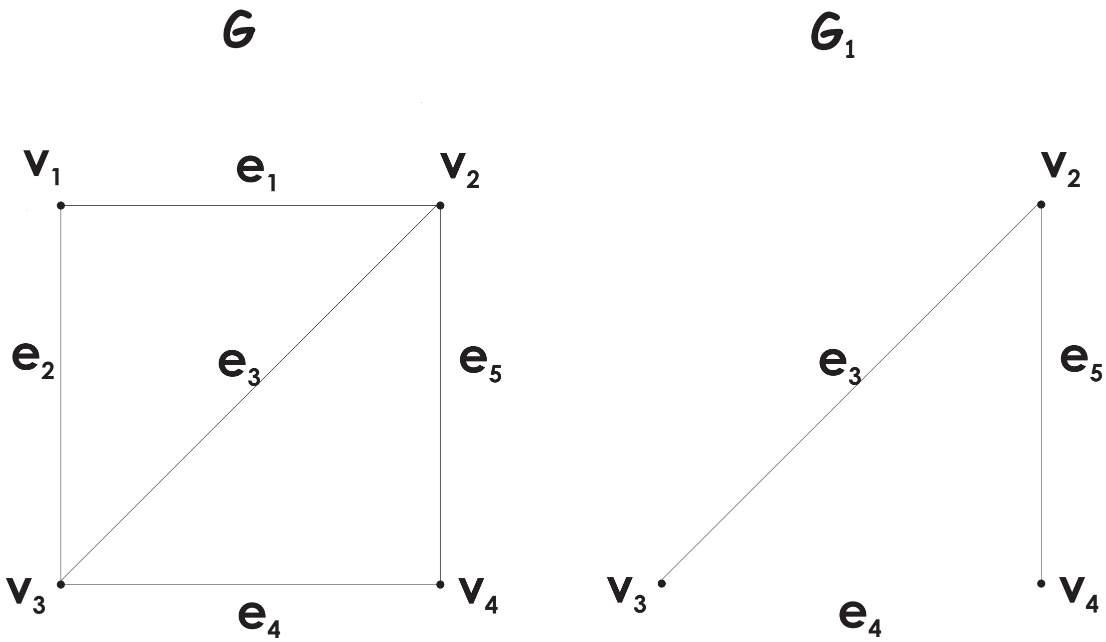


Figura 2: G_1 es subgrafo de G

4.1.4 Subgrafos, complementos e isomorfismos de grafos

Definición 13 *Dado un grafo $G = (V, E)$ (dirigido o no), diremos que un subgrafo $G_1 = (V_1, E_1)$ es un **subgrafo recubridor** si $V_1 = V$*

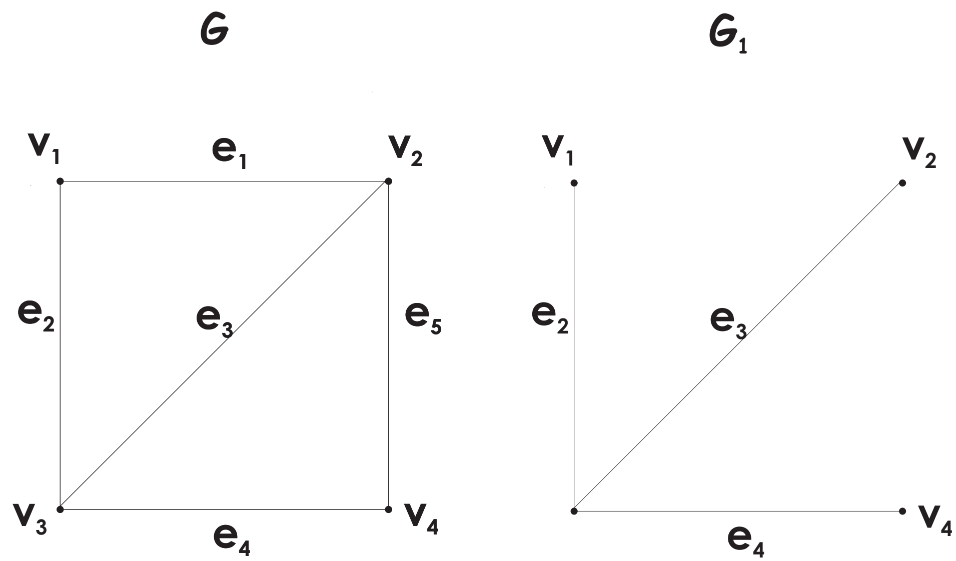


Figura 3: G_1 es subgrafo recubridor de G

4.1.4 Subgrafos, complementos e isomorfismos de grafos

Definición 14 *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no). Si $\emptyset \neq U \subseteq V$, llamaremos* ***subgrafo de*** G ***inducido por*** U *al subgrafo cuyos vértices son los de U y que contiene todas las aristas de G que unen vértices de U. A este subgrafo lo denotamos por $\langle U \rangle$*

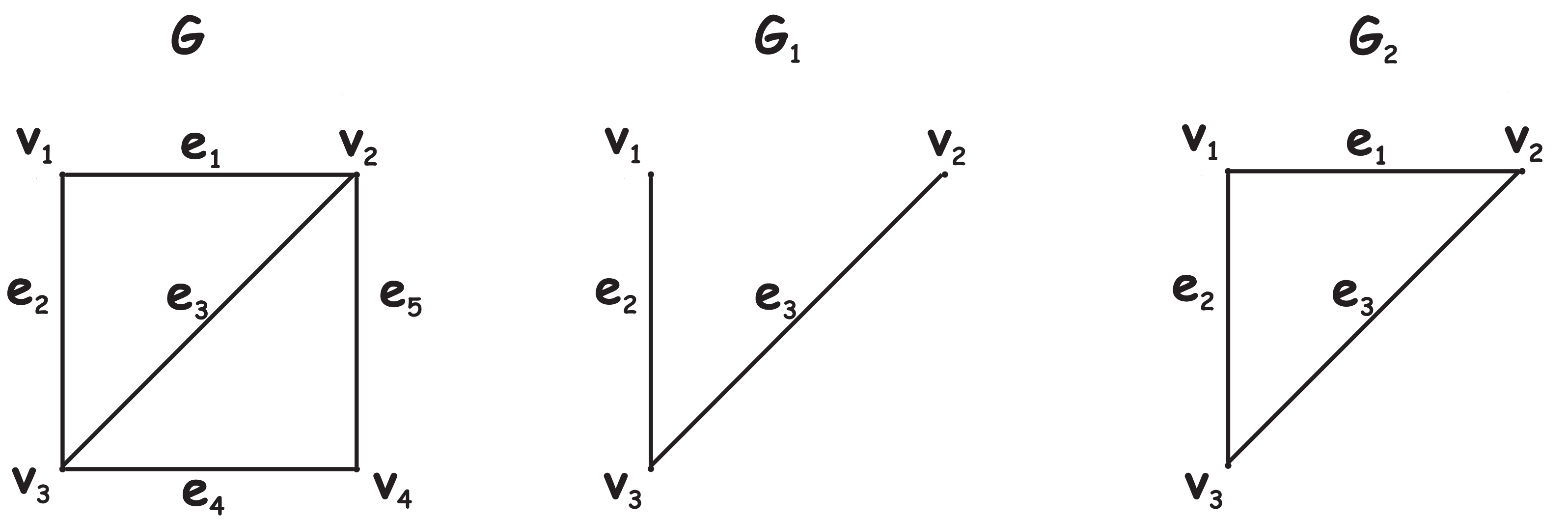


Figura 4: G_1 no es subgrafo inducido de G, G_2 sí.

4.1.4 Subgrafos, complementos e isomorfismos de grafos

Definición 15 *Sea v un vértice de un grafo $G = (V, E)$, dirigido o no.*

El subgrafo de G denotado por $G - v$ es el grafo $G' = (V', E')$ donde $V' = V - \{v\}$ y $E' = E - \{$ aristas incidentes en $v\}$.

Si e es una arista de un grafo $G = (V, E)$.

El subgrafo $G - e$ es el grafo $G' = (V', E')$ donde $V' = V$ y $E' = E - \{e\}$.

4.1.4 Subgrafos, complementos e isomorfismos de grafos

Definición 16 *Sea G un grafo no dirigido con n vértices. Llamaremos* ***grafo complementario*** *de G, que se denota con G^c, al subgrafo de K_n formado por los n vértices de G y todas las aristas de K_n que no están en G. Si $G = K_n$ entonces G^c es un subgrafo con n vértices y ninguna arista. A este grafo se le llama* ***grafo nulo****.*

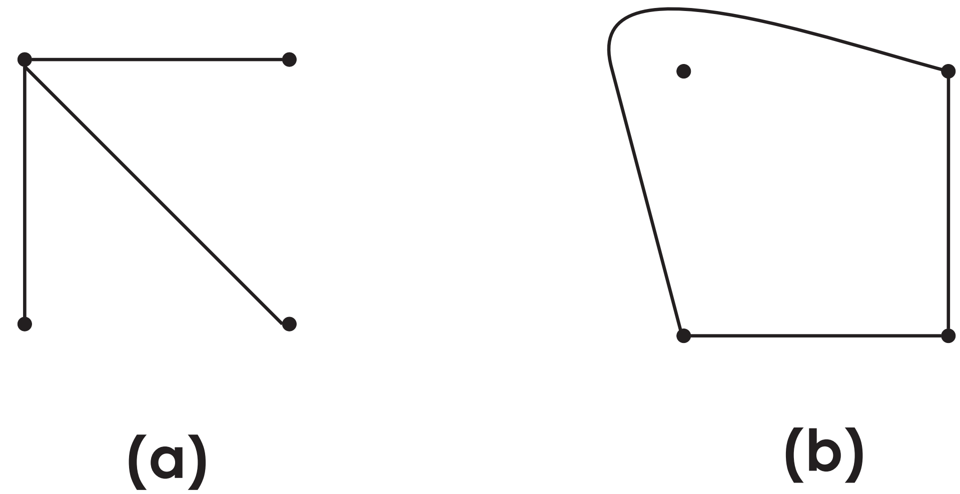
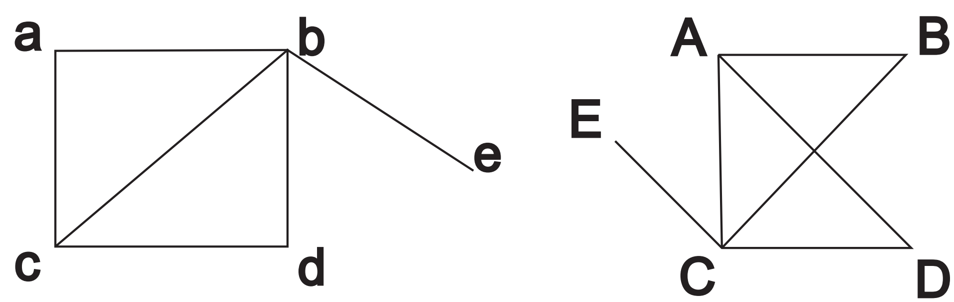


Figura 5: El grafo (a) es complemento del grafo (b)

4.1.4 Subgrafos, complementos e isomorfismos de grafos

Definición 17 *Dos grafos* $G_1 = (V_1, E_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2)$ *no dirigidos son isomorfos si hay una función* $f \colon V_1 \to V_2$ *biyectiva con la propiedad de que, para cada par de vértices* $a, b \in V_1$, a, b *son adyacentes en* G_1 *si y sólo si* $f(a), f(b)$ *son adyacentes en* G_2.



4.1.5 Grafos conexos

Definición 18 *Dos vértices u y v de un grafo no dirigido G se dice que están* ***conectados*** *si existe un camino de extremos u y v.*

Teorema 0.3 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido, en V se define la relación binaria siguiente:*

$$u\mathcal{C}v \leftrightarrow u \text{ y } v \text{ están conectados.}$$

La relación $\mathcal{C}$ es una relación binaria de equivalencia (RBE).

4.1.5 Grafos conexos

Definición 19 *Dado un grafo no dirigido $G = (V, A)$, a cada subgrafo de G determinado por el conjunto de vértices de cada clase de equivalencia de la relación $\mathcal{C}$ se le llama **componente conexa** de V*

Definición 20 *Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido diremos que es un **grafo conexo** si existe un camino simple entre cualquier par de vértices distintos de V.*

Definición 21 *Una arista a de un grafo G se llama **puente** si al suprimir a del grafo se obtiene un grafo con más componentes conexas que G.*

Teorema 0.4 *Un grafo conexo tiene una única componente conexa.*

Corolario 0.1 *Cada componente conexa de un grafo es un grafo conexo.*

4.1.6 Grado de un vértice

Definición 22 *Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido, dado un vértice v, se llama* ***grado del vértice*** *al número de aristas incidentes en él. Si existe un lazo, lo contaremos dos veces. Al valor $\sum_{v\in V} gr(v)$ le llamaremos* ***grado del grafo*** *y se le denota por $gr(G)$*

Teorema 0.5 *Si $G=(V,E)$ es un grafo no dirigido, entonces:*

$$\sum_{v\in V} gr(v) = 2card(E)$$

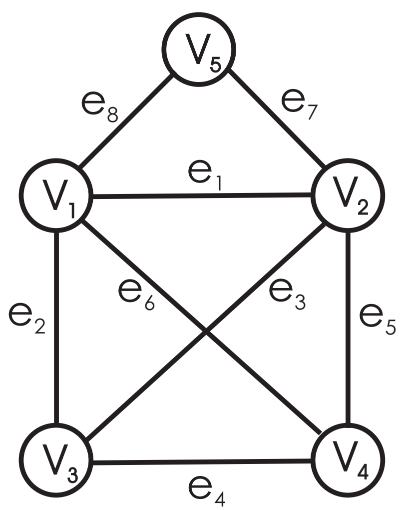
Definición 23 *Dado un vértice v de un grafo dirigido G, se llama* ***grado de entrada*** *de v y se denota por $gr_e(v)$ al número de aristas cuyo extremo es v y se llama* ***grado de salida*** *de v denotándose por $gr_s(v)$ al número de aristas cuyo origen es v.*

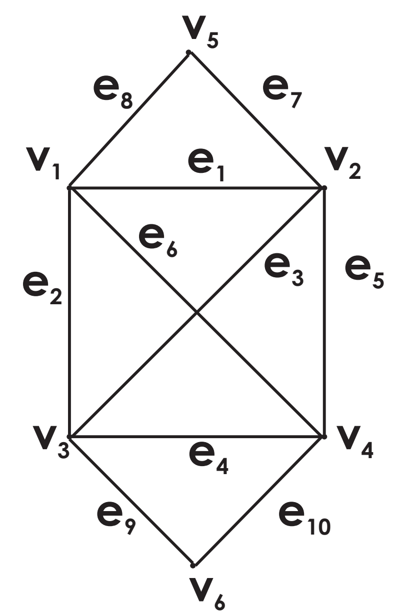
Definición 24 *Si u y v son dos vértices de un grafo dirigido, llamaremos* ***grado del par*** *(u,v) al número de aristas cuyo origen es u y cuyo extremo es v y lo denotaremos por $gr(u,v)$.*

4.1.7 Recorridos y Circuitos Eulerianos

Definición 25 *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, un recorrido que recorra todas las aristas de E se llama* **recorrido euleriano**. *Si es un circuito, será un circuito euleriano.*

Definición 26 *Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido se dice que es un* ***grafo euleriano*** *cuando contiene al menos un recorrido euleriano cerrado, es decir, un circuito euleriano.*





4.1.7 Recorridos y Circuitos Eulerianos

Teorema 0.6 (de Euler) *Un grafo $G = (V, A)$ no dirigido, sin vértices aislados, con $A \neq \emptyset$ es un grafo euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.*

Corolario 0.2 *Si G es un grafo no dirigido, conexo y sin vértices aislados, podemos construir un recorrido euleriano en G si y sólo si G es conexo y tiene exactamente 2 vértices de grado impar.*

Teorema 0.7 *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido y sin vértices aislados. El grafo tiene un circuito euleriano dirigido si y sólo si G es conexo y $\forall v \in V$ se cumple: $gr_e(v) = gr_s(v)$*

4.1.7 Recorridos y Circuitos Eulerianos

4.1.8 Caminos y Ciclos Hamiltonianos

Definición 27 *Diremos que un ciclo en un grafo G, dirigido o no, es un **ciclo hamiltoniano** si contiene cada vértice de G exactamente una vez, excepto los extremos, que son el mismo vértice. Un **camino hamiltoniano** es un camino simple (no un ciclo) de G que contiene todos los vértices.*

Teorema 0.8 *Un grafo K_n^* dirigido completo contiene siempre un camino hamiltoniano (dirigido).*

4.1.8 Caminos y Ciclos Hamiltonianos

1. Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $\forall v \in V$ se cumple que $gr(v) \geq 2$
2. Si $v \in V$ y $gr(v) = 2$, entonces las dos aristas incidentes con v deben aparecer en cualquier ciclo hamiltoniano.
3. Si $v \in V$ y $gr(v) > 2$, cuando tratamos de construir un ciclo hamiltoniano, una vez que hemos pasado por el vértice v, dejamos de tener en cuenta las aristas no utilizadas e incidentes con v.
4. Al construir un ciclo hamiltoniano para G, no podemos obtener un ciclo para un subgrafo de G a menos que contenga todos los vértices de G.

4.1.8 Caminos y Ciclos Hamiltonianos

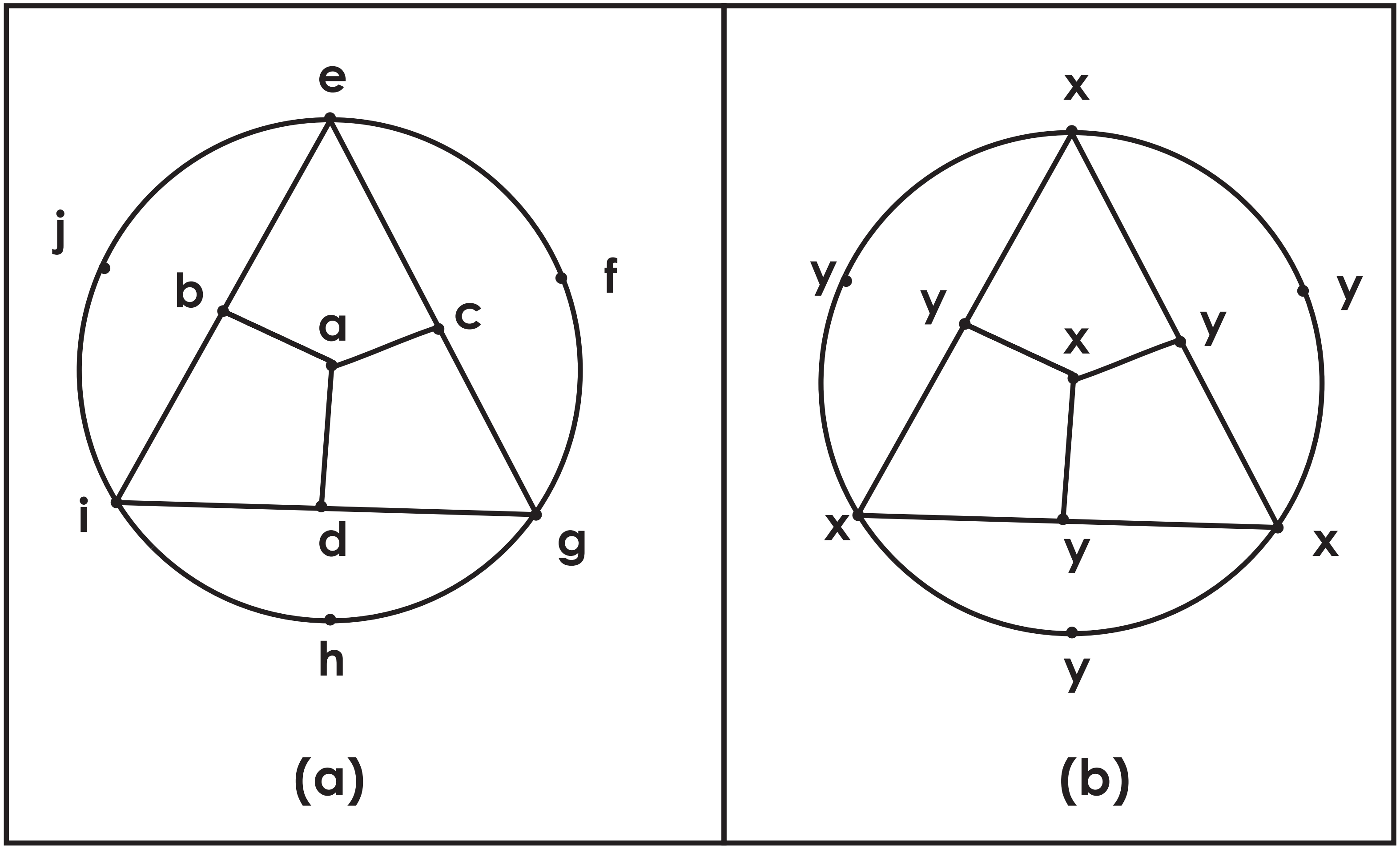


Figura 6: Grafo no hamiltoniano

4.1.9 Grafos Planos

Definición 28 *Un grafo (dirigido o no)* $G = (V, E)$ *diremos que es plano si podemos dibujarlo en el plano de modo que sus aristas sólo se intersecan en vértices de* G*. Al dibujo le llamaremos* ***inmersión*** *de* G *en el plano.*

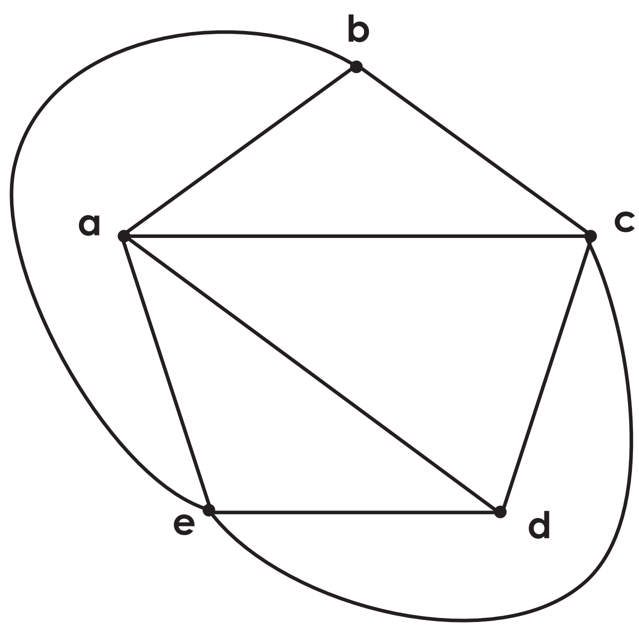


Figura 7: El grafo plano K_5 no es plano

4.1.9 Grafos Planos

Definición 29 *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos, tal que $E \neq \emptyset$. Una **subdivisión elemental** de G es un nuevo grafo, obtenido cuando eliminamos una arista, $\{v, w\}$ de G, y, dado $u \notin V$ se construye el grafo $G' = (V \cup \{u\}, (E - \{v, w\}) \cup \{\{v, u\}, \{u, w\}\})$*

Definición 30 *Dos grafos no dirigidos sin lazos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, diremos que son **homeomorfos** si son isomorfos o si ambos se pueden obtener del mismo grafo no dirigido y sin lazos G por una sucesión de subdivisiones elementales.*

Teorema 0.9 (de Kuratowski) *Un grafo no es plano si y sólo si contiene un subgrafo que es homeomorfo a K_5 ó a $K_{3,3}$*

4.1.9 Grafos Planos

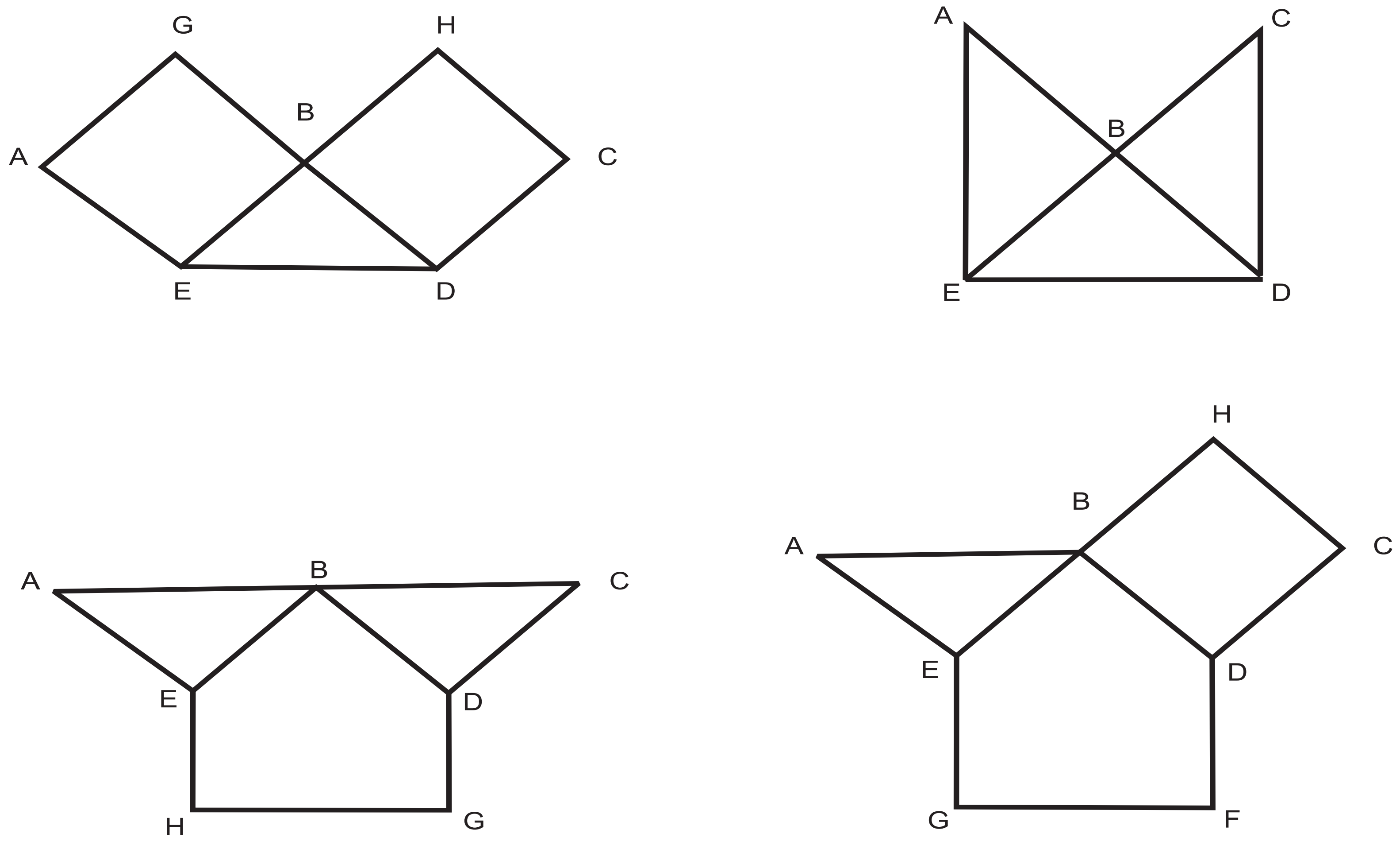


Figura 8: 4 grafos homeomorfos no isomorfos

4.1.9 Grafos Planos

Teorema 0.10 *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo (dirigido o no) plano y conexo, con* $|V| = m$ *y* $|E| = n$*. Sea* r *el número de regiones en el plano determinadas por una inmersión (representación plana) de* G*, entonces* $m - n + r = 2$*.*

4.2 Árboles

4.2.1 Árboles no dirigidos

Definición 31 *Un* ***árbol*** T *es un grafo simple que satisface la siguiente propiedad: Si* v *y* w *son vértices de* T*, entonces existe un único camino simple que une* v *y* w*.*

Teorema 0.11 *Si* G *es un grafo con* n *vértices, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) G *es un árbol*

ii) G *es conexo y no posee ciclos*

iii) G *es conexo y tiene* $n-1$ *aristas*

iv) G *no tiene ciclos y tiene* $n-1$ *aristas*

4.2.1 Árboles no dirigidos

Definición 32 *A es **árbol generador** del grafo G si A es un árbol y es subgrafo recubridor de G.*

Teorema 0.12 *Todo grafo conexo posee un árbol generador.*

4.2.1 Árboles no dirigidos

ALGORITMO:
Si G es un grafo conexo con n vértices:

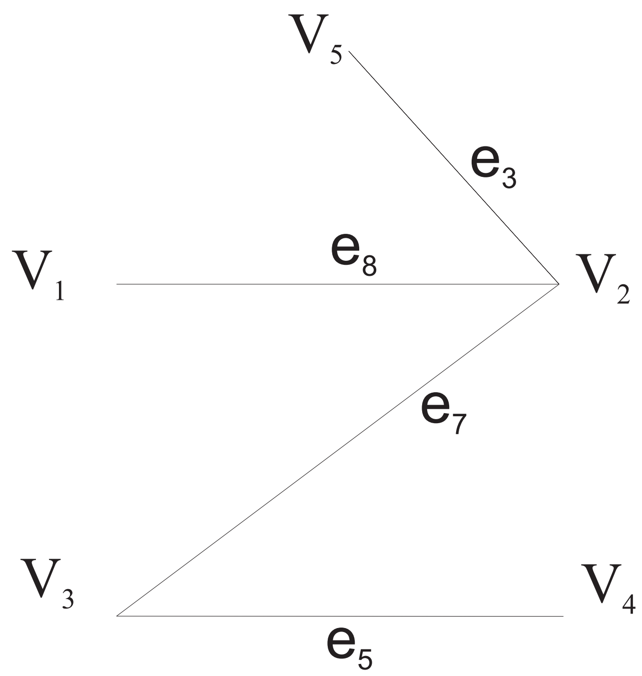
Paso 1: Elegir un vértice v de G y considerar el árbol A_1 formado sólo por v.

Paso 2: Para $i = 2, \ldots, n$ formar el árbol A_i a partir de A_{i-1} eligiendo un vértice de G que no sea vértice de A_{i-1} tal que esté conectado con algún vértice de A_{i-1} por una arista, y añadiendo esa arista.

Paso 3: El árbol A_n así obtenido es árbol generador.

4.2.1 Árboles no dirigidos

EJEMPLO



4.2.2 Grafos con coste

Definición 33 *Dado un grafo conexo* $G = (V, E)$*, una* ***función de coste*** *es una función definida* $f\colon E \to \mathbb{R}^{+}$.

PROBLEMA

Hallar un subgrafo G' generador de G, $G' = (V', E')$ tal que el coste total de G' definido por $f(G') = \sum_{e' \in E'} f(a)$ sea mínimo.

4.2.2 Grafos con coste

ALGORITMO DE PRIM

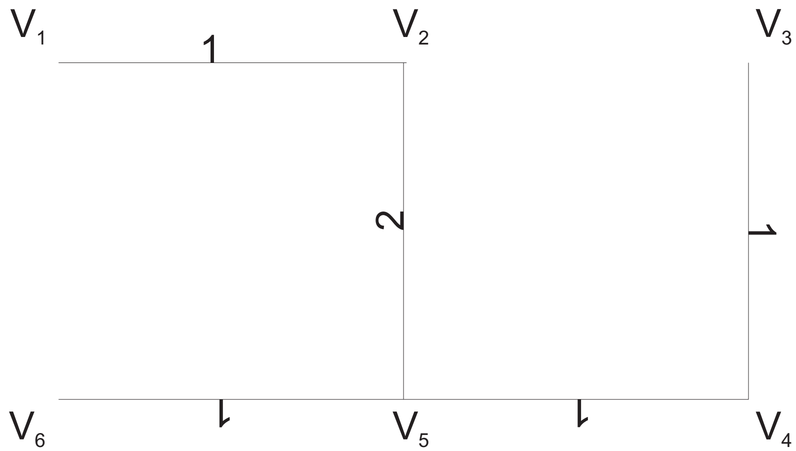
Paso 1: Elegir un vértice v de G y considerar el árbol A_1 formado sólo por v.

Paso 2: Para $i = 2, \ldots, n$ formar el árbol A_i a partir de A_{i-1} eligiendo un vértice de G que no sea vértice de A_{i-1} tal que esté conectado con algún vértice de A_{i-1} por una arista de coste mínimo entre todas las posibles, y añadiendo esa arista.

Paso 3: El árbol A_n así obtenido es árbol generador de coste mínimo.

4.2.2 Grafos con coste

EJEMPLO



Coste$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$

4.2.2 Grafos con coste

ALGORITMO DE KRUSKAL

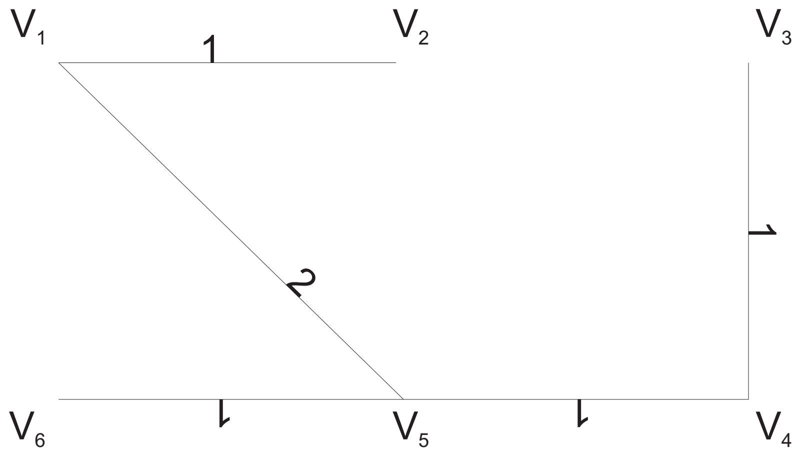
Paso 1: Se selecciona una arista de coste mínimo $e_1 = (v_1, v_2)$ y se construye el subgrafo $G_1 = (V_1 = \{v_1, v_2\}, E_1 = \{e_1\})$.

Paso 2: Para $i = 2, \ldots, n-2$ tenemos seleccionadas las aristas E_{i-1} seleccionamos una arista $e_i = \{u, w\}$ de modo que con las aristas anteriores no forme ciclo y su peso sea lo menor posible. Se construye el subgrafo $G_i = (\{V_i = V_{i-1} \cup \{u, w\}, E_i = E_{1-1} \cup \{e_i\})$.

Paso 3 Hacer $i = i + 1$. Si $i = n - 1$ el subgrafo obtenido en el paso anterior es conexo, tiene n vértices y $n-1$ aristas y es un árbol recubridor de coste mínimo. Si $i < n-1$ volvemos al paso 2.

4.2.2 Grafos con coste

EJEMPLO



Coste= $1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$

4.2.3 Árboles dirigidos

Definición 34 *Un vértice v de un grafo dirigido se dice que es una **raíz** si todos los vértices del grafo son accesibles desde v.*

Definición 35 *Un **árbol con raíz** es un grafo dirigido tal que posee una raíz y el grafo no dirigido asociado es un árbol.*

Representación

Convenio:

1. El vértice superior es la raíz.
2. Si un vértice u es hijo de otro vértice v, se representa u por debajo de v uniendo ambos con un segmento.

4.2.3 Árboles dirigidos

EJEMPLO

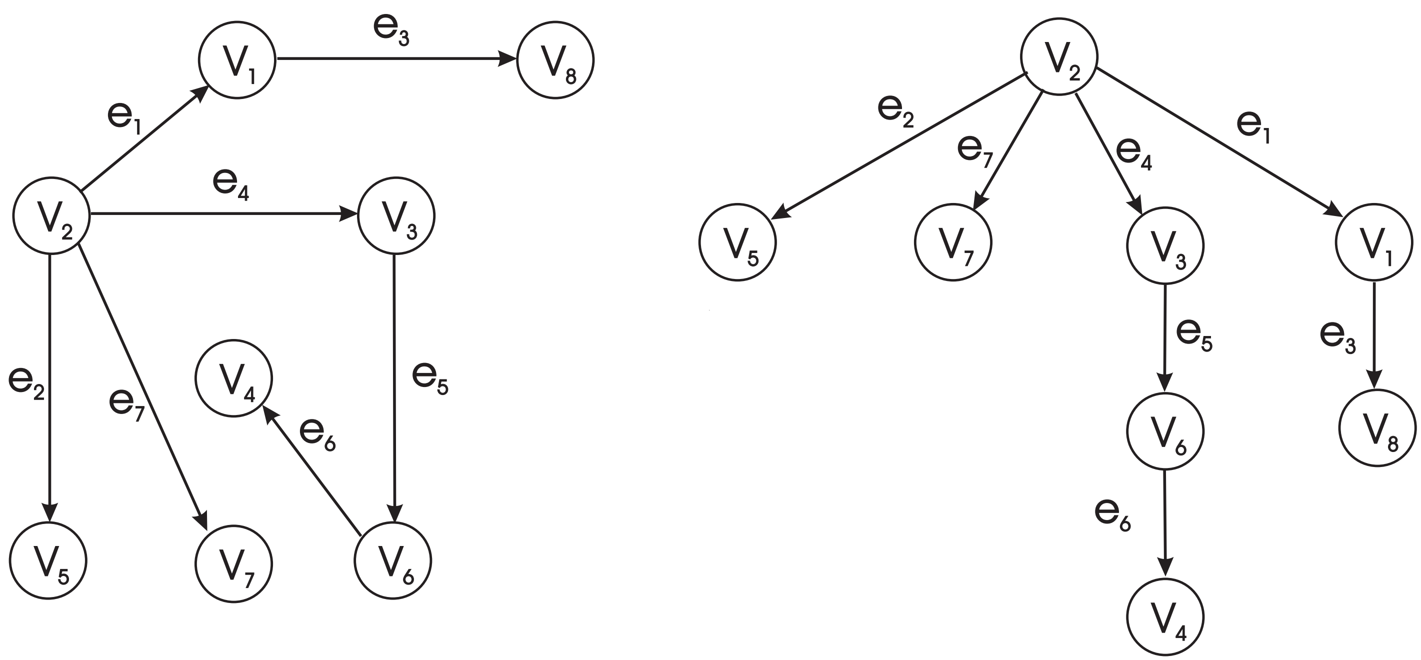


Figura 9: Árbol dirigido y su representación por convenio

4.2.3 Árboles dirigidos

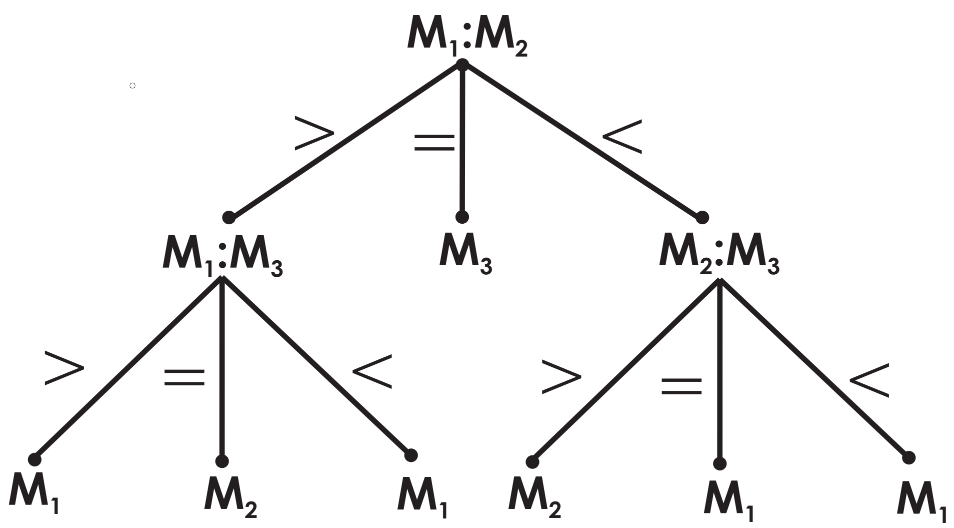
Definición 36 *Sean* $G_i = (V_i, A_i)$ *con* $i = 1, 2, \ldots, n$ *n árboles dirigidos, cuyas raíces son* r_i*, y tales que, si* $i \neq j$*,* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *y* $V_i \cap V_j = \emptyset$*. Se llama* ***árbol suma*** *de los árboles* G_1*,* G_2*, ...,*G_n *y se denota por* $G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i = G_1 \oplus G_2 \oplus G_n$ *al árbol* $G = (V, A)$ *donde*

$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup \{r\}$ *siendo* r *un vértice tal que* $r \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *siendo* a_i *aristas que unen* r *con* r_i*.*

4.2.3 Árboles dirigidos

EJEMPLO Tres monedas tienen la misma apariencia pero una de ellas tiene distinto peso. Se dispone tan solo de una balanza de platillos sin pesas.
Plantee el árbol de decisión del problema de encontrar la moneda diferente.



4.2.3 Árboles dirigidos

EJEMPLO Debemos ordenar con un cierto criterio tres elementos a, b, c.
Plantee el árbol de decisión del problema.