Matemática Discreta

Talleres divulgativos
“matemáticas en acción”

24 Noviembre 2004

Francisco Santos

¿Qué es la Matemática Discreta?

En matemáticas, “discreto” es lo contrario de “continuo”.

continuo

discreto

●●●●●●

“Matemática discreta” es casi sinónimo de “combinatoria”, aunque lo primero es más amplio que lo segundo.

La matemática discreta trata de números enteros, conjuntos finitos, objetos geométricos discretos (poliedros, complejos simpliciales,…)

La matemática discreta engloba:

- combinatoria ("el arte de contar")
- "geometría discreta" (poliedros, etc)
- teoría de grafos
- álgebra discreta (grupos y cuerpos finitos, códigos algebraicos,…)
- etc…

En esta charla nos fijamos en cuatro ejemplos:
(1) particiones de un número.
(2) grafos Eulerianos y Hamiltonianos.
(3) empaquetando esferas que se besan.
(4) poliedros regulares.

¿Es una disciplina nueva?

Desde luego que no. Veremos varios ejemplos de Teoremas de Matemática Discreta descubiertos por Leonard Euler (1707-1783). Antes de Euler cabe citar a Jakob Bernoulli, Abraham de Moivre, Blaise Pascal.

… pero la Matemática Discreta ha vivido un renacer (¿revolución?) en el siglo XX, por dos razones:

-ha pasado de ser una mera “colección de problemas sueltos y trucos de resolución” a tener una estructura definida y bien fundamentada (por ejemplo, con los trabajos de G.C. Rota en los 1960’s.

- la Matemática Discreta es la parte de las matemáticas más cercana a los ordenadores, y tiene una relación bidireccional con ellos: **los ordenadores son discretos.**

"… the recent development of combinatorics is somewhat of a cinderella story: It used to be looked down on by "mainstream" mathematicians as being somehow less respectable than other areas, in spite of many services rendered to both pure and applied mathematics. Then along came the prince of computer science with its many mathematical problems and needs --- and it was combinatorics that best fitted the glass slipper held out".

A. Björner, R. P. Stanley, 1999

"El desarrollo reciente de la combinatoria es en cierto modo la historia de la cenicienta: los matemáticos ortodoxos la miraban por encima del hombro, considerándola menos respetable que otras áreas a pesar de sus muchos servicios tanto a la matemática pura como aplicada. Pero entonces llegó el príncipe de la informática con todos sus problemas y necesidades matemáticas, y la combinatoria fue a quien mejor le entraba el zapatito de cristal".

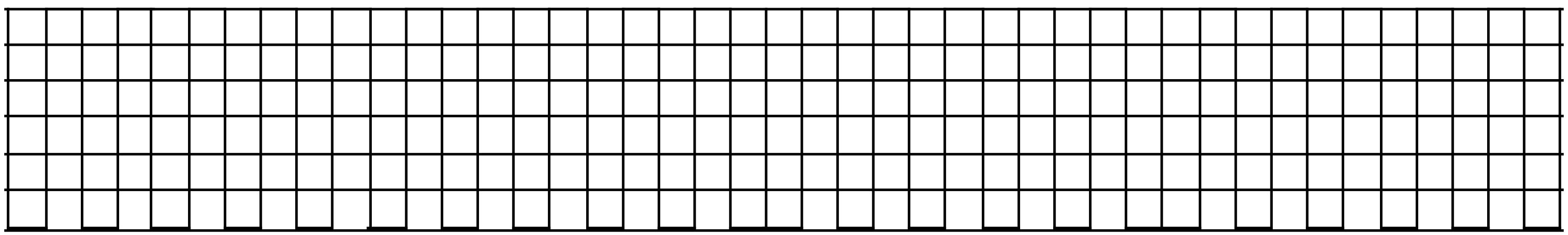
(1) Particiones de un número

Un poco de combinatoria

La combinatoria es el arte de contar o, para ser más precisos, el arte de decir cuántos objetos hay en un cierto conjunto, o de cuántas maneras se puede hacer algo, sin necesidad de contarlo explícitamente.

Por ejemplo, en un curso básico de combinatoria se aprende que hay 13 983 816 de combinaciones posibles en la lotería primitiva (el "número combinatorio 49 sobre 6").

… y también que ese mismo número cuenta las posibles maneras de ir desde el punto (0,0) al punto (43,6) mediante caminos monótonos en la retícula de cuadrados de lado 1.



Particiones de un número

Dado un número natural ***n*** llamamos "particiones de ***n***" a todas las maneras de escribir ***n*** como suma de números naturales. *Por ejemplo: hay 11 particiones del número 6:*

1+1+1+1+1+1
2+1+1+1+1
2+2+1+1
2+2+2
3+1+1+1
3+2+1
3+3
4+1+1
4+2
5+1
6

Euler, en 1740, demostró el siguiente

Teorema: para todo número ***n***, hay tantas particiones de ***n*** en partes *distintas* como particiones de ***n*** en partes *impares.*

Ejemplo: para ***n***=9:

Distintas:	*Impares*:
9	9
8+1	7+1+1
7+2	5+3+1
6+3	5+1+1+1+1
6+2+1	3+3+3
5+4	3+1+1+1+1+1+1
5+3+1	1+1+1+1+1+1+1+1+1

Demostración: Para cada $\boldsymbol{n}$, sea $\boldsymbol{p_n}$ el número de particiones de $\boldsymbol{n}$. Llamamos **función generatriz** de la sucesión $(\boldsymbol{p_n})$ a la función:

$$P(x) = p_o + p_1\, x + p_2\, x^2 + p_3\, x^{3\,+} + p_4\, x^{4\,+} \cdots$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} P(x) = &(1 + x + x^2 + x^{3\,+} + x^4 + \ldots.)\\ &(1 + x^2 + x^4 + x^{6\,+} + x^8 + \ldots.)\\ &(1 + x^3 + x^6 + x^{9\,+} + x^{12} + \ldots.)\\ &(1 + x^4 + x^8 + x^{12\,+} + x^{16} + \ldots.)\\ &(1 + x^5 + x^{10} + x^{15\,+} + x^{20} + \ldots.)\\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Del mismo modo, la función generatriz de las particiones en partes impares es:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I(x)} = {} & (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.) \\
& (1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots.) \\
& (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \ldots.) \\
& (1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + \ldots.) \\
& \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Y la de las particiones en partes distintas es:

$$\boldsymbol{D(x)} = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)\ldots\ldots$$

Se trata, por tanto, de ver que ***I***(x) = ***D***(x).
Eso es cierto porque:

$$I(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\cdots)$$
$$(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+\cdots)(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+\cdots)\cdots =$$
$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$$

Y:

$$D(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots =$$
$$= \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots}(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots =$$
$$= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots} =$$
$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$$

QED

El teorema de Euler sobre particiones, aparte de su interés, ilustra el método de las **funciones generatrices** en combinatoria enumerativa.

Es uno de los métodos más usados hoy día. El principio básico es que a veces es más fácil manipular la función generatriz “en global” que los términos de la sucesión a estudiar, individualizados. (Además de que, por ejemplo, el análisis de los ceros de la función generatriz da información muy precisa sobre el comportamiento asintótico de la sucesión a estudiar.

La teoría de particiones (de números, de conjuntos, de dimensión dos y superior) tiene relaciones con, por ejemplo, representación de grupos de Lie y con mecánica estadística.

Nota: existen demostraciones posteriores del Teorema de Euler que dan una correspondencia explícita y biyectiva entre “particiones impares” y “particiones sin repetición”. Por ejemplo, la siguiente se debe a Sylvester:

-dada una partición en partes distintas, descompóngase cada parte como un número impar multiplicado por una potencia de dos (lo cual se puede hacer de manera única). Sustitúyase cada parte por el factor impar repetido las veces que dice el factor potencia de dos. Por ejemplo:

60=15 x 4 se sustituiría por “15+1515+15”.

46=23 x 2 se sustituiría por “23+23”

8=1 x 8 se sustituiría por “1+1+1+1+1+1+1+1”

-dada una partición en partes impares, considérese un número *i* y sea *r* la cantidad de veces que aparece en la partición. Escríbase *r* como suma de potencias de dos distintas (lo cual se puede hacer de manera única, se trata de escribir *r* en base dos). Agrúpense las repeticiones de *i* en los grupos marcados por las poten-cias de dos que aparecen. Por ejemplo:

“5+5+5+5+5+5+ se sustituiría por “20+10”.
“1+1+1+1+1+1+1” se sustituiría por “4+2+1”.
“27+27+27+27+27+27” por “108 +54”.

Se deja al lector comprobar que estas dos transformaciones se deshacen la una a la otra y, por tanto, dan una biyección entre particiones impares y particiones sin repetición.

(2) Grafos

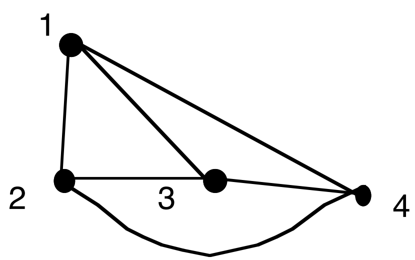
Teoría de grafos

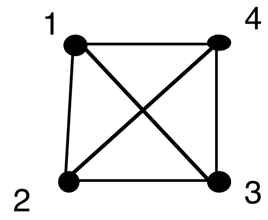
Junto con la combinatoria enumerativa es la otra gran pata de la Matemática discreta.

Un **grafo** es un objeto combinatorio formado por un conjunto finito de "vértices", unidos entre sí por "aristas".

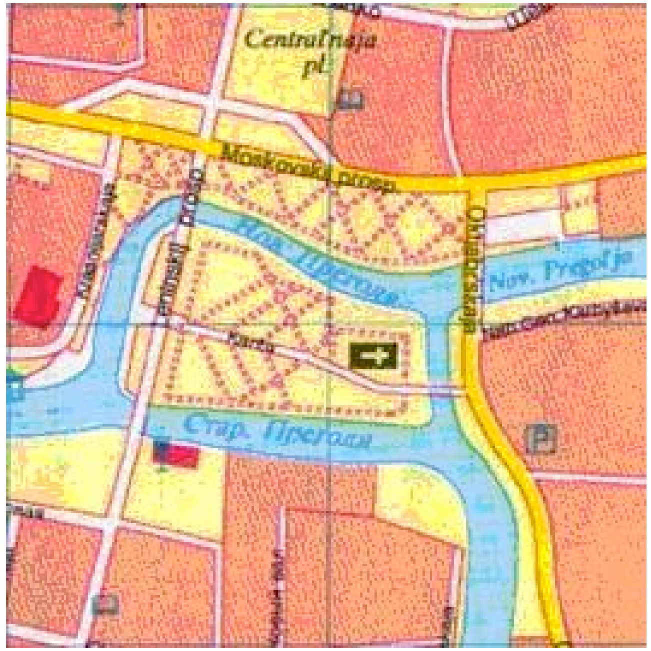
Formalmente, un grafo con vértices **V**={1,2,3,…,n} no es más que un conjunto de parejas de elementos de **V**.

Ejemplo: el "grafo completo" con cuatro vértices:





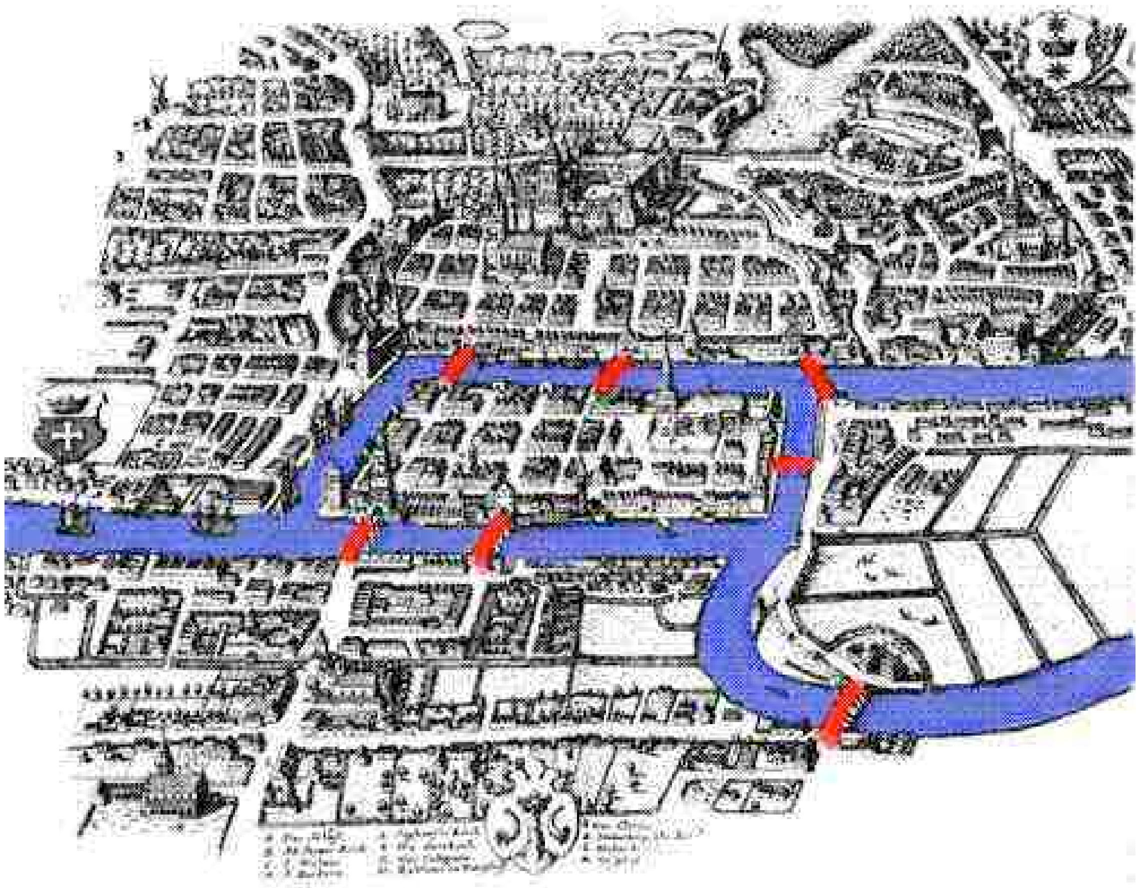
Los puentes de Königsberg



Königsberg, en tiempos de Euler

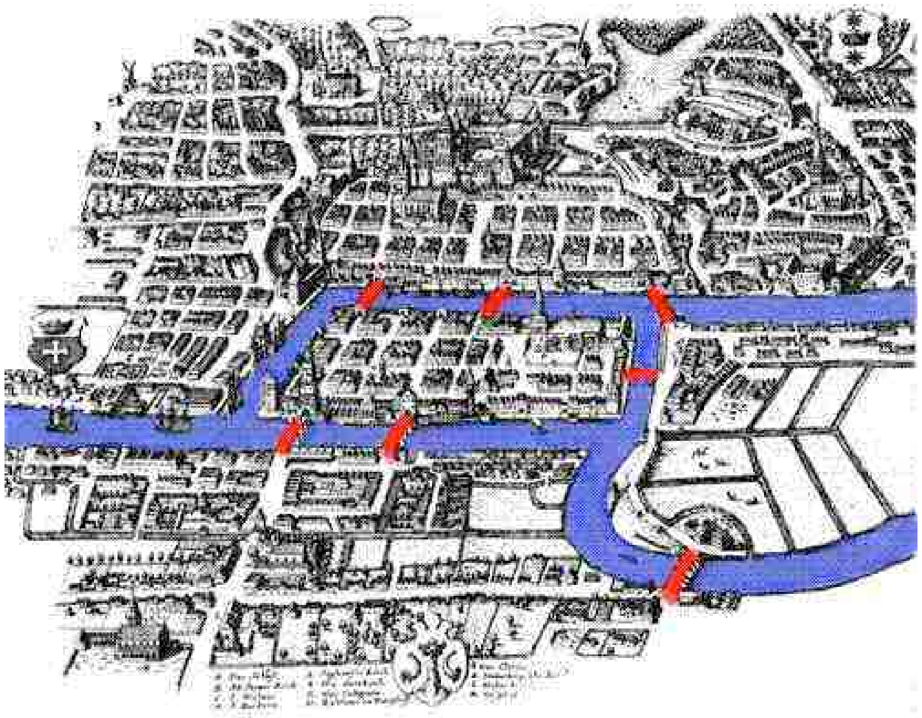
Kaliningrado, hoy

En tiempos de Euler se hizo popular en Königsberg hacer la siguiente pregunta:

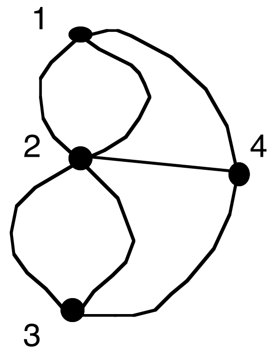


¿Es posible atravesar los siete puentes de Königsberg pasando una sóla vez por cada uno de ellos?

Euler reformuló la pregunta como un problema de teoría de grafos (y, de paso, inventó el concepto de grafo):



¿Es posible recorrer entero el siguiente grafo sin pasar dos veces por ninguna arista?



Teorema (Euler): Sea **G** un grafo (finito y conexo).

(a) la suma de las valencias de todos sus vértices es par. Es decir, hay un “número par de vértices impares”.

(b) Si el número de vértices impares es mayor que dos, el grafo no se puede recorrer [sin pasar dos veces por ninguna arista].

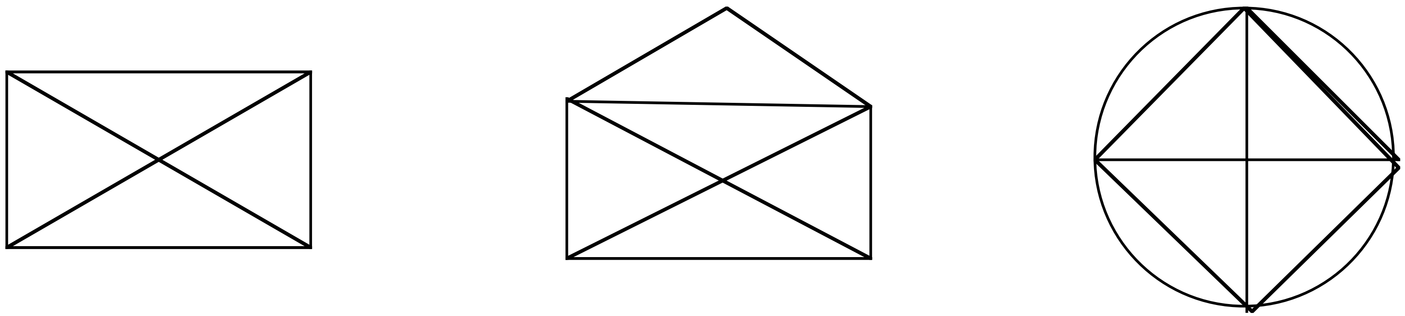
(c) Si el número de vértices impares es cero, el grafo se puede recorrer. Podemos además elegir por qué vértice empezar, y el camino siempre será cerrado (termina donde empezó).

(d) Si el número de vértices impares es dos, el grafo se puede recorrer, pero el camino ha de empezar en uno de los dos vértices impares y terminar en el otro.

A los grafos del apartado (c) se les llama “eulerianos”

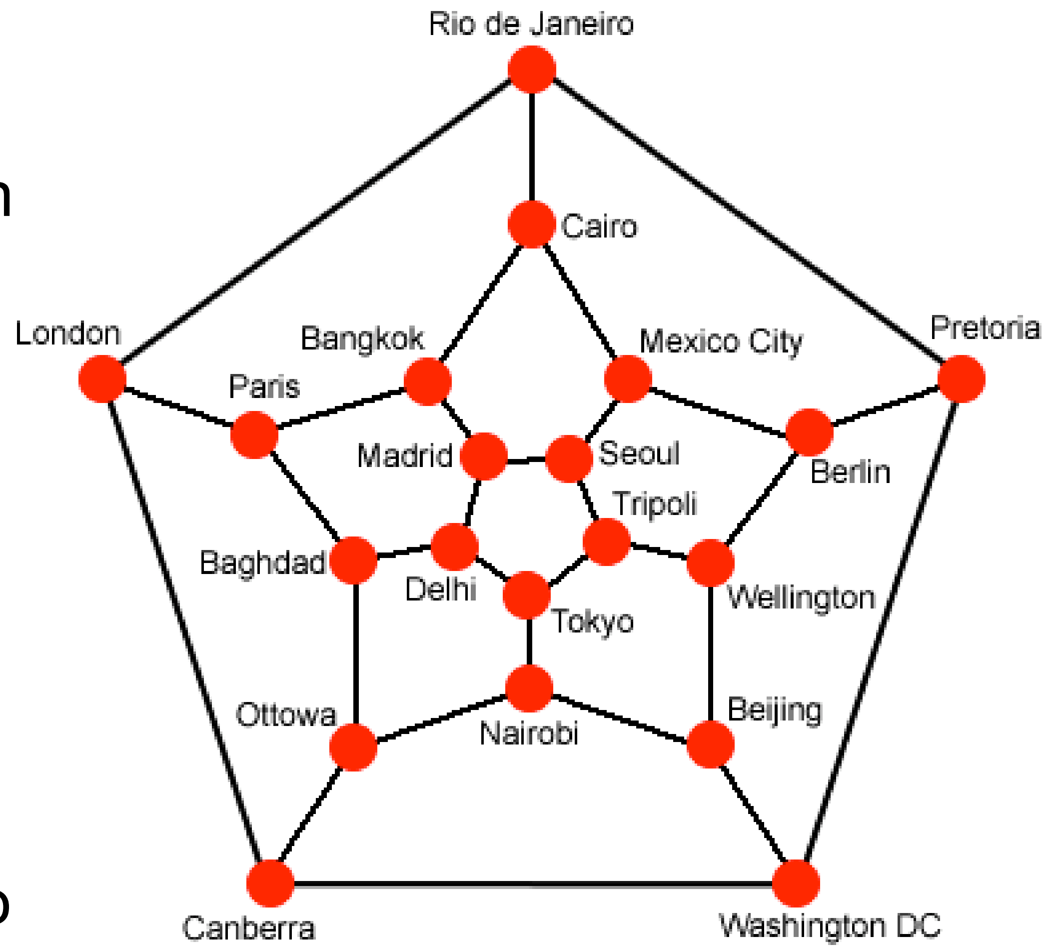
En particular, la respuesta a la pregunta de Königsberg es negativa

¿Cuáles de los siguientes grafos se pueden recorrer de manera euleriana?



Grafos Hamiltonianos

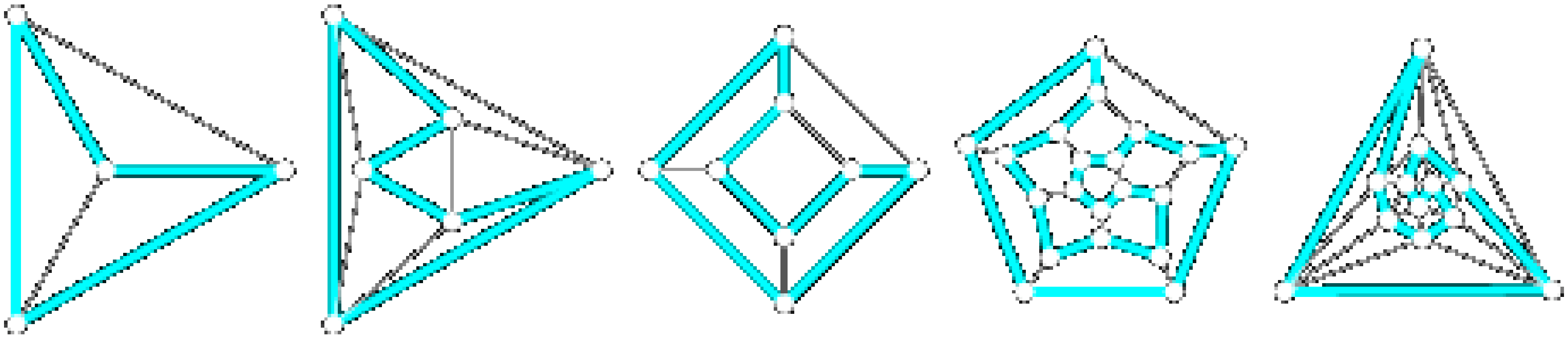
W.R. Hamilton (1805-1865) inventó (y patentó) un juego en el que se trataba de hacer un recorrido por 20 ciudades del mundo sin pasar por ninguna más de una vez. Las ciudades estaban unidas por 30 aristas, formando el grafo de un icosaedro.



Es decir, se trataba de construir un **camino Hamiltoniano** en el grafo del dodecaedro.

El juego “icosiano” de Hamilton

El problema tiene solución en el dodecaedro,
y de hecho en los cinco poliedros regulares:



Pregunta: dado un grafo cualquiera, ¿cómo es posible decidir si el grafo posee un camino Hamiltoniano?

Es una pregunta parecida a al de Euler, así que **esperaríamos una respuesta parecida.**

Respuesta: con mucha dificultad!

Teorema (Garey-Johnson, 1983): decidir si un grafo posee un camino Hamiltoniano es un problema NP-completo.

¿Qué significa NP-completo?

- “es algo demasiado complejo de explicar en esta charla”.
- NP-completo es un problema “difícil de **resolver** pero fácil de **comprobar**”.
- NP-completo implica que “casi seguro” no existe ningún **algoritmo** general para resolver ese problema en tiempo **polinómico**. De hecho, si usted lo encuentra:

  * Con el mismo método podrá descifrar las claves criptográficas más utilizadas.
  * El Instituto Clay (Cambridge, Mass.) le dará un millón de dólares (“P=NP” es uno de sus “problemas del milenio”).

(3) Esferas que se besan

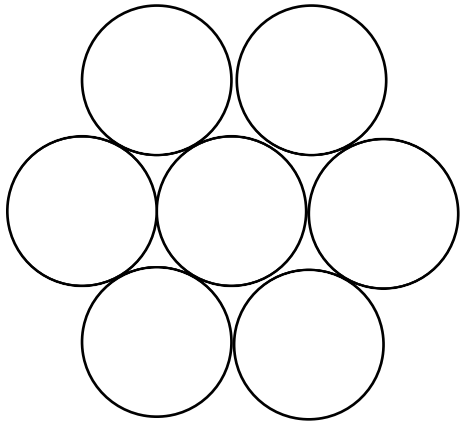
Empaquetamientos (y besos) de esferas

Dos problemas clásicos de geometría combinatoria son:

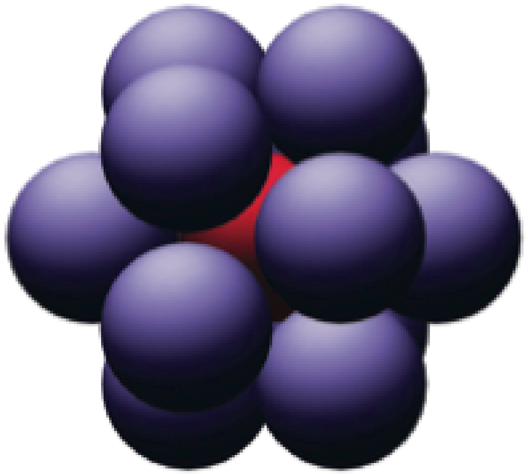
*<u>Empaquetamiento de esferas en dimensión **n**</u>*: en el espacio Euclídeo de dimensión ***n***, ¿cuál es la mayor densidad con que pueden colocarse esferas del mismo radio, sin que se solapen?

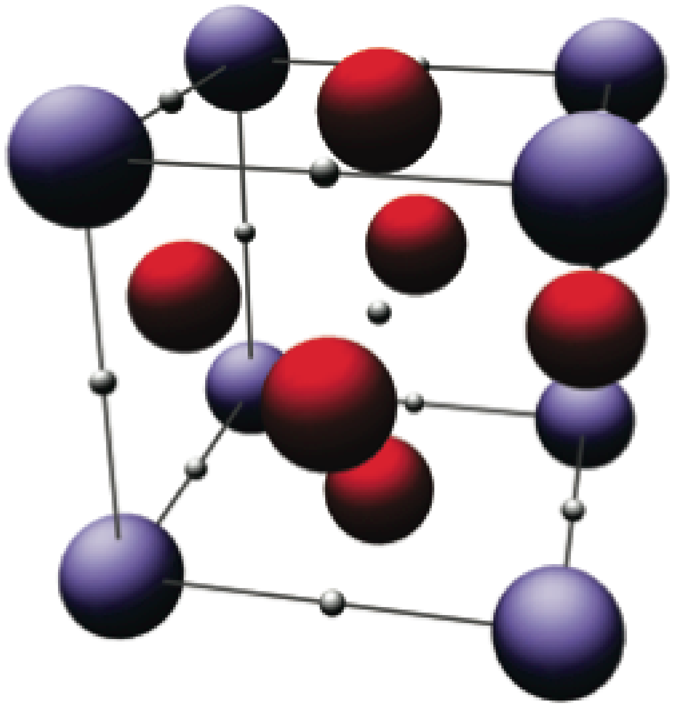
*<u>El número de “besado” de dimensión **n**</u>*: ¿cuántas esferas de dimensión ***n*** pueden tocar simultánea-mente a otra esfera del mismo radio, sin que se solapen?

En **dimensión dos** la solución es relativamente sencilla: no más de seis bolas pueden tocar a una, simultáneamente, y el empaquetamiento hexagonal es el más denso posible. Lo primero es muy fácil de demostrar. Lo segundo requiere cierto trabajo y lo demostró por primera vez A. Thue en 1892.



En **Dimensión 3** es posible colocar 12 esferas que toquen a una dada: por ejemplo, en los vértices de un icosaedro regular, o en los de un cubo-octaedro regular (es decir, en los puntos medios de las 12 aristas de un cubo):





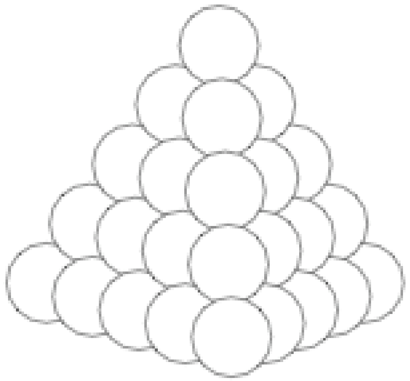
Ahora bien, ¿será posible también colocar **13** esferas? Y ¿es posible extender estas configuraciones “ad infinitum”?

El problema de las 13 esferas

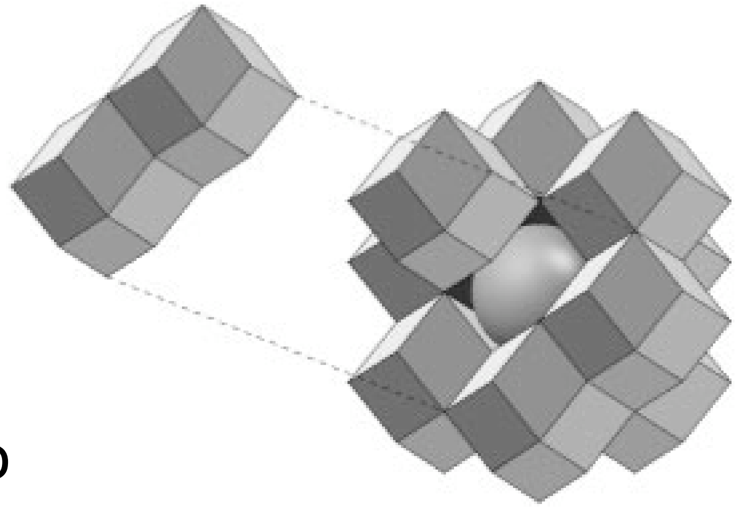
Una de las primeras apariciones del problema es en una discusión entre **Newton** (1643-1727) y **David Gregory** (1659-1708). Gregory opinaba que es posible colocar 13 esferas, y Newton que no. Pero la demostración formal (de que 13 no es posible) no llegó hasta final del Siglo XIX (Bender 1874, Hoppe 1874, Güther 1875).

En cuanto al **problema de empaquetamiento**, Kepler afirmaba que el empaquetamiento más compacto posible el que se sigue del cubo-octaedro (red cúbica centrada en las caras). Pero el problema estuvo abierto hasta hace bien poco…

La conjetura de Kepler



En el empaquetamiento cúbico compacto, las esferas forman capas de empaquetamientos hexagonales



La “celda de Voronoi” de cada esfera es un dodecaedro rómbico

La conjetura de Kepler. Citas.

Kepler, 1609: “de este modo el ensamblaje será muy prieto, de modo que ninguna otra disposición permitirá meter más glóbulos en el mismo recipiente”.

Hilbert, 1900 (como parte del problema 18 de su famosa lista “para los matemáticos futuros”**): “**¿Cuál es la manera más densa de colocar en el espacio un número infinito de sólidos iguales de una forma dada, e.g., esferas […]?”

C. A. Rogers, 1958: “Muchos matemáticos creen, y todos los físicos saben, que la densidad no puede exceder de pi/raiz(18)=0.74048, pero la mejor cota establecida con propiedad parece ser 0.828,….”

J. Milnor, 1974: “la situación es escandalosa, puesto que la respuesta correcta se conoce desde Gauss. Lo único que nos falta es una demostración.”

La conjetura de Kepler. Historia

Gauss (1831) demostró que el empaquetamiento cúbico centrado en las caras es el más denso posible **si nos restringimos a empaquetamientos por retículos.**

La conjetura de Kepler. Historia

L. Féjes Toth (1953) redujo por primera vez la conjetura de Kepler a un problema de cálculo (encontrar el mínimo de cierta función de varias variables), finito… pero complicado.

T. Hales consiguió demostrar la conjetura en 1998. Su método simplifica al de Féjes-Toth pero aún así “es, si lo suponemos correcto, un *tour de force* en optimización no lineal” (J. Lagarias, 2002). La demostración de Hales fue escrita en una serie de seis artículos (con una ingente cantidad de casuística y cálculos por ordenador) de los cuales sólo tres han sido publicados a fecha de hoy.

Dimensión 4

En **dimensión 4** el empaquetamiento más compacto concido es el “retículo D4” (puntos de coordenadas enteras y con suma par). Cada esfera toca a otras 24 (colocadas en los vértices de una “24-celda”).

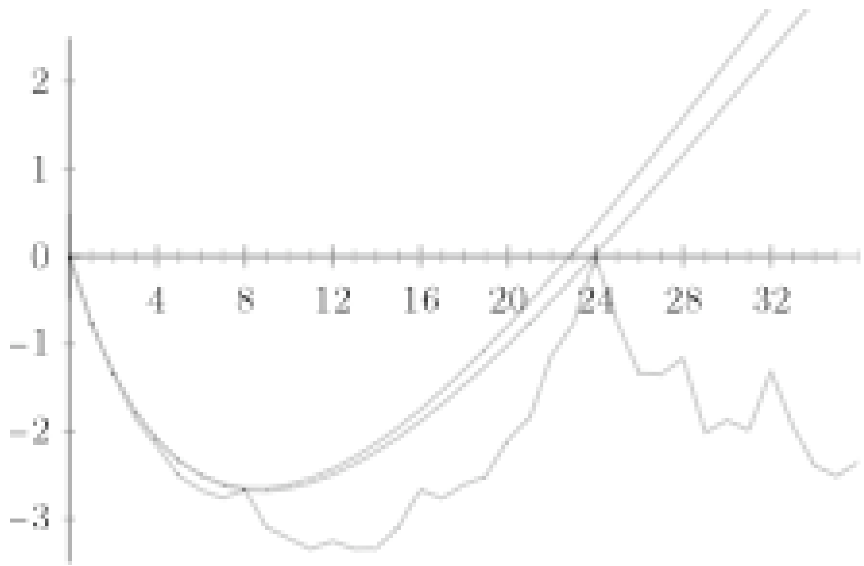
Korkine y **Zorotareff** (1973) demostraron que es el mejor empaquetamiento reticular, pero aún no se sabe si es el mejor empaquetamiento en general.

En cuanto al “número de besado”, tan sólo hace dos años se ha conseguido demostrar que **es imposible que 25 esferas toquen a otra del mismo radio, en dimensión 4.** (Oleg Musin, 2002)

En dimensiones aún mayores:

El empaquetamiento reticular más denso se conoce en dimensiones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 24.

Los de dimensiones 6, 7, y 8 (retículos E6, E7 y E8) los demostró Blichfeld en 1938. El de dimensión 24 es el llamado "retículo de Leech", conocido desde los 1950's, pero su optimalidad no se demostró hasta hace poco (Cohn y Elkies, 2003).



La cota de Cohn-Elkies para empaquetamientos reticulares,mejora ligeramente a la anterior cota conocida y es suficiente para concluir que el retículo de Leech es óptimo.

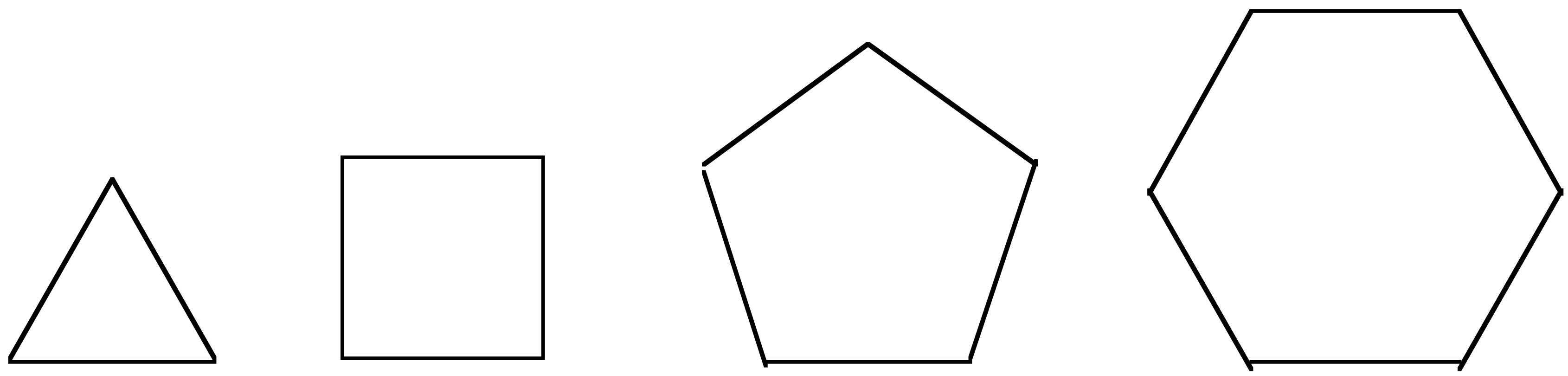
(4) Poliedros regulares

Un poliedro regular de dimensión 3 es un poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares **iguales** e **“igualmente dispuestos”** (= el grupo de simetrías del poliedro contiene al de simetrías de cada cara y es transitivo sobre los vértices).

Un poliedro regular de dimensión ***n***+1 es un poliedro cuyas caras son todas poliedros regulares de dimensión ***n*** **iguales** e **igualmente dispuestos.**

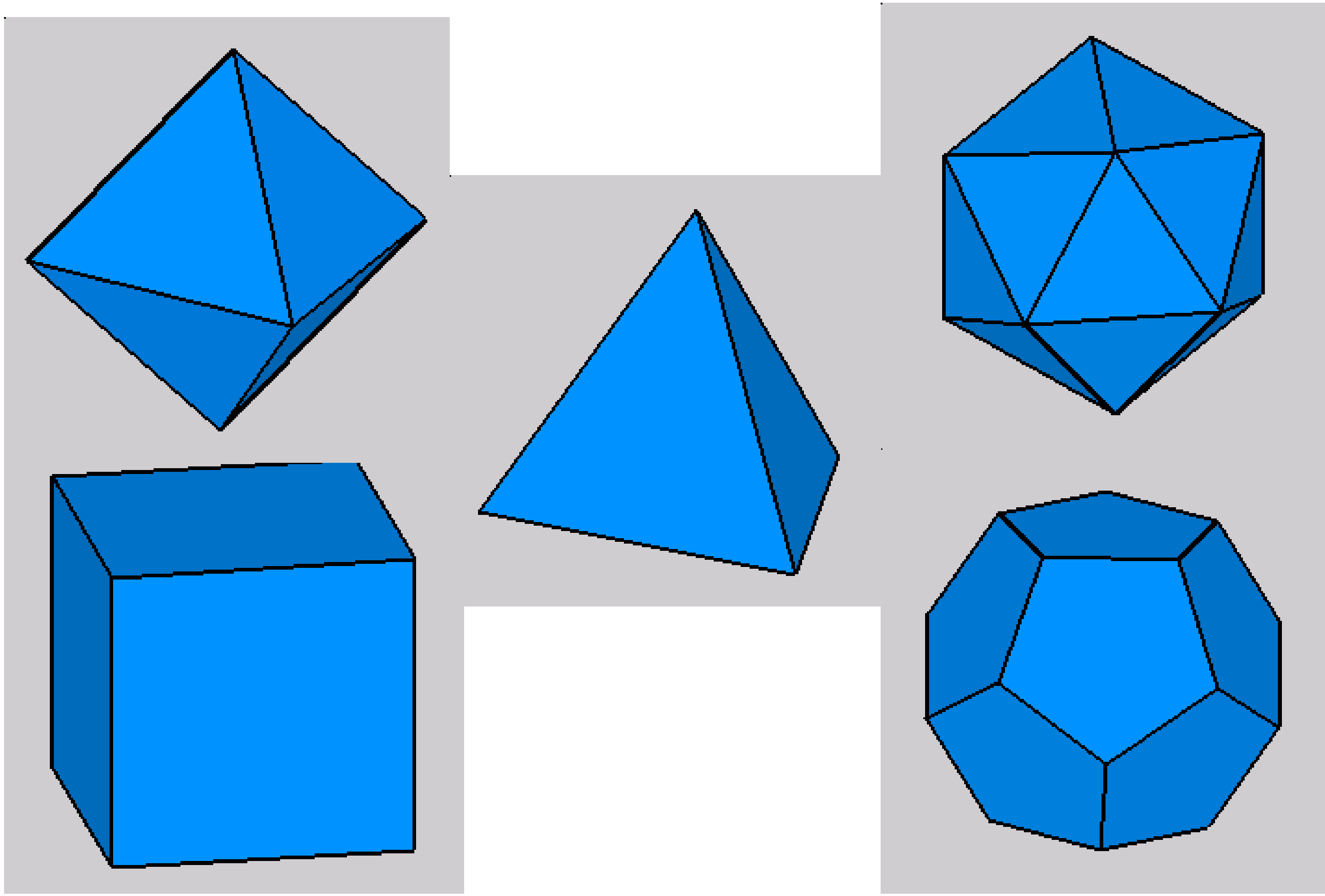
Dimensión 2:

Hay “un” polígono regular para cada número de lados:



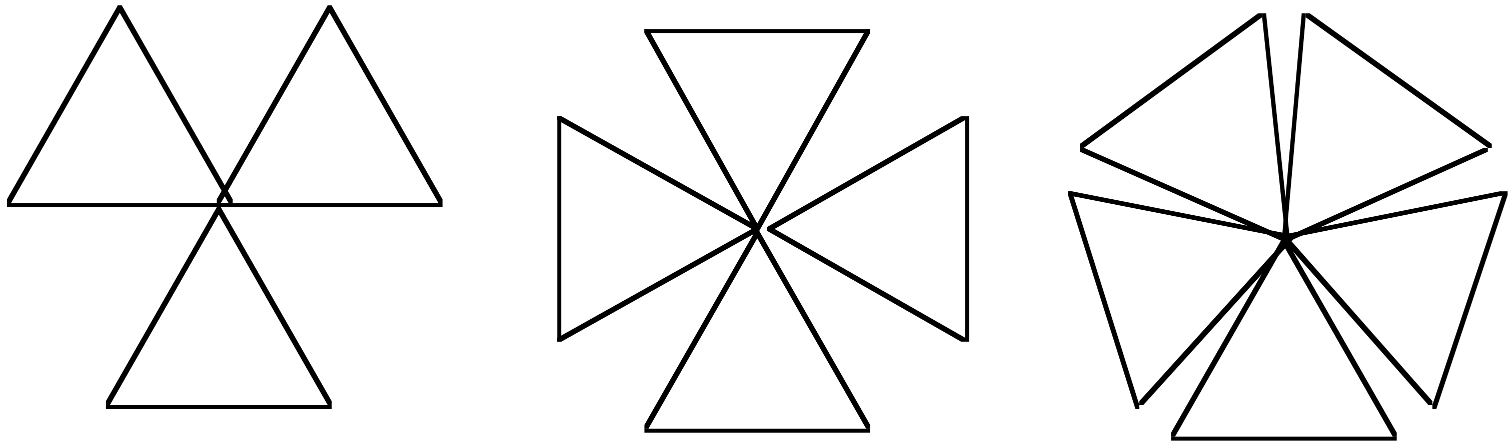
Dimensión 3:

Hay sólo cinco. Los cinco **solidos platónicos:**

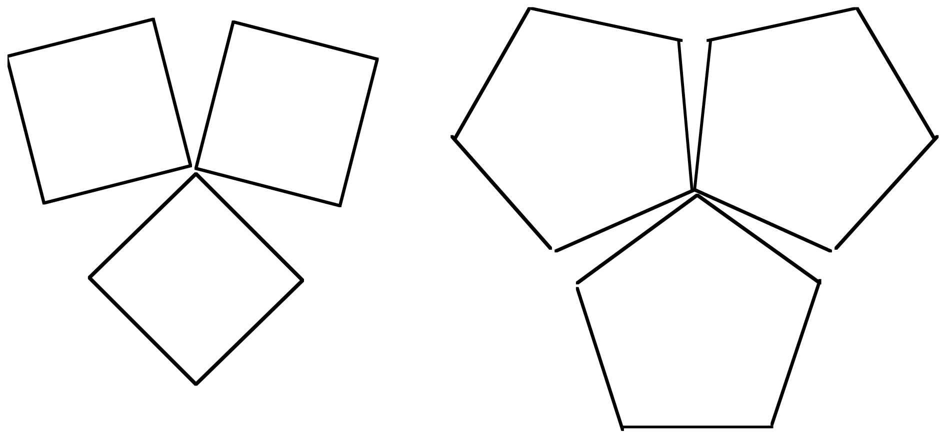


Demostración de que sólo hay estos cinco:

Con triángulos, el número de triángulos por vértice ha de ser tres, cuatro o cinco, porque la suma de ángulos alrededor de un vértice ha de ser menor que 360 (y 60 x 6=360)



Del mismo modo, con cuadrados y pentágonos sólo es posible colocar tres alrededor de cada vértice, porque 90x4 = 360 y 108x4 > 360.

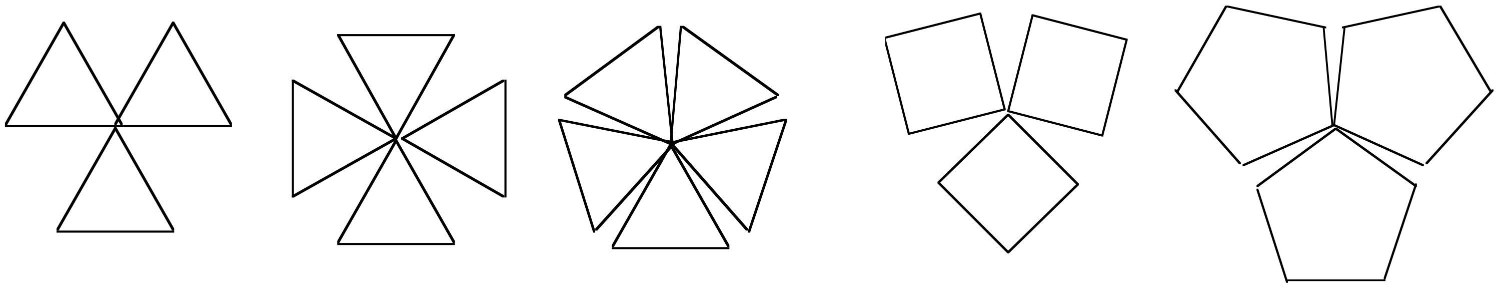


Con hexágonos no es posible colocar ni siquiera tres.

Dimensión 4

Es fácil llevar a cabo la misma clasificación en dimensión cuatro. La única novedad es que no tenemos que pensar en **cuántos** poliedros de una clase es posible colocar en cada vértice sino **de qué maneras** es posible colocarlos de modo que alrededor del vértice "se forme un poliedro regular" (al que llamaremos "figura de vértice" del poliedro de dimensión cuatro).

Fijémonos de nuevo en el caso de dimensión tres:



Tipo de caras	Figura de vértice	Poliedro resultante
Triángulos	Triángulos	Tetradedro
Triángulos	Cuadrados	Octaedro
Triángulos	Pentágonos	Icosaedro
Cuadrados	Triángulos	Cubo
Pentágonos	Triángulos	Dodecaedro

En el paso de dimensión tres a cuatro, debe haber “compatibilidad” entre los poliedros de dimensión tres P y Q usados como cara y como figura de vértice. Para que sea posible hacer la construcción de manera simétrica, las caras de *Q* han de ser iguales a la figura de vértice de *P*.

(Por ejemplo, si queremos colocar cubos pegados por un vértice de manera “completamente simétrica” la figura de vértice será un poliedro con triángulos por caras, que son las figuras de vértice del cubo).

Eso deja, a priori, las 11 posibilidades de la siguiente tabla:

Cara (*P*)	**Figura de vértice (*Q*)**
Tetraedro	Tetraedro
Tetraedro	Octaedro
Tetraedro	Icosaedro
Cubo	Tetraedro
Cubo	Octaedro
Cubo	Icosaedro
Dodecaedro	Tetraedro
Dodecaedro	Octaedro
Dodecaedro	Icosaedro
Octaedro	Cubo
Icosaedro	Dodecaedro

Lo único que nos queda es comprobar, caso por caso, si hay "espacio suficiente" para colocar los poliedros *P* formando la figura de vértice *Q*. Eso sucede si (y sólo si) el ángulo sólido en un vértice de *P* es menor que el ángulo con que cada cara es vista desde el centro de *Q*.

Cara (*P*)	**Figura de vértice (*Q*)**
Tetraedro	**Tetraedro**
Tetraedro	**Octaedro**
Tetraedro	**Icosaedro**
Cubo	**Tetraedro**
Cubo	Octaedro
Cubo	Icosaedro
Dodecaedro	**Tetraedro**
Dodecaedro	Octaedro
Dodecaedro	Icosaedro
Octaedro	**Cubo**
Icosaedro	Dodecaedro

Los casos positivos resultan ser los 6 resaltados en negrita.

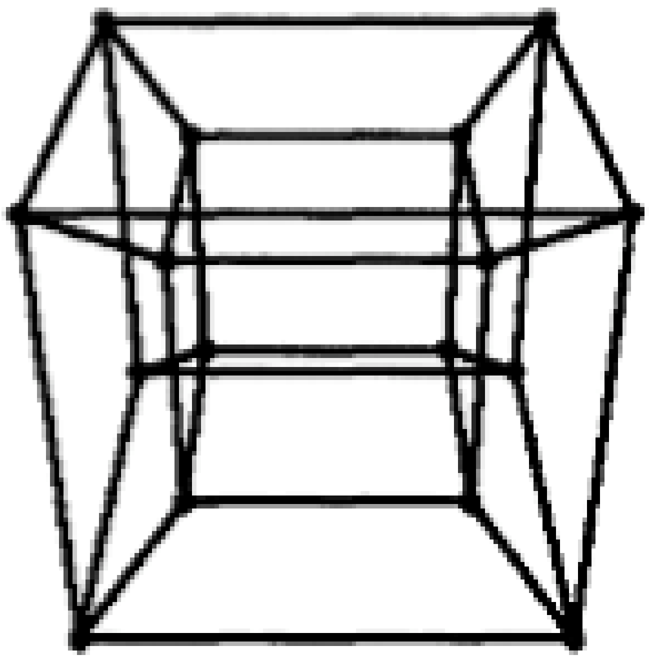
Hay 6 poliedros regulares de dimensión cuatro.

Nota: a decir verdad, sólo hemos demostrado que **no puede haber más** que estos seis, pero hace falta un argumento más (o una construcción explícita) para demostrar que estos seis existen. Es decir, que la regla "local" para construirlos se puede propagar y no da lugar a malas intersecciones entre caras. Además, la construcción no nos dice cuántas caras tendrá el poliedro final, del mismo modo que "a priori" no podemos saber que colocando cinco triángulos por vértice en dimensión tres vamos a obtener un poliedro de 20 caras.

Por ejemplo, si queremos que las caras de nuestro poliedro regular sean cubos, debemos empezar colocando cubos alrededor de un vértice de modo que (“localmente”, alrededor del vértice) se forme uno de los tres poliedros regulares cuyas caras son triángulos.

Es fácil hacerlo con cuatro cubos (formando un tetraedro) e imposible hacerlo con 20 (formando un icosaedro). Si lo intentamos hacer con ocho (octaedro) resulta algo análogo al caso de seis triángulos en el plano: se pueden colocar, pero resultan pegados unos a otros y no “sobra espacio” para poder “inclinarlos” a dimensión cuatro de manera convexa.

Es decir, **el único poliedro regular de dimensión cuatro cuyas caras son cubos es** el que tiene cuatro caras en cada vértice: **el hipercubo, o 4-cubo** (bola unidad de la norma L_{inf}).



El 4-cubo (diagrama de Schlegel):

Del mismo modo:

Si las caras son **tetraedros**, se pueden disponer formando tanto tetraedros, como octaedros y como icosaedros alrededor de cada vértice. Los poliedros resultantes son:

- El **símplice** (de dimensión cuatro), que tiene cinco vértices, 10 aristas, 10 triángulos, y 5 tetraedros.

- El **"politopo cruzado"** (dual del hipercubo y bola unidad de la norma L_1) que tiene 8 vértices, 24 aristas, 32 triángulos y 16 tetraeedros como caras.

- La **600-celda**, que tiene 120 vértices, 720 aristas, 1200 triángulos y 600 tetraedros.

Si las caras son **dodecaedros**, sólo es posible colocar cuatro alrededor de cada vértice, formando (localmente) un tetraedro. El poliedro resultante en dimensión 4 es la **120-celda** que tiene 600 vértices, 1200 aristas, 720 pentágonos y 120 dodecaedros.

Si las caras son **octaedros**, la disposición local debe ser la de un 3-poliedro con caras cuadradas, es decir un cubo. Se comprueba que sí es posible hacerla. El 4-poliedro resultante en dimensión 4 es la **24-celda** que tiene 24 vértices, 96 aristas, 96 triángulos y 24 octaedros.
Es un **poliedro autodual** y es la base para resolver el problema de empaquetamiento y el de besado en dimensión 4. Sus vértices son los de un cubo y un politopo cruzado con el mismo circuncentro. Es, en cierto modo, el análogo 4-dimensional del dodecaedro rómbico (excepto que éste no es regular).

Por último, con caras **icosaédricas** es imposible construir un 4-poliedro regular. Haría falta poder colocar 20 en cada vértice (formando un dodecaedro localmente) y no es posible hacerlo.

En resumen: **los seis poliedros regulares de dimensión cuatro son:**

- El **símplice** y la **24-celda**, que son autoduales.
- El **hipercubo** y su dual, el **politopo cruzado**.
- la **120-celda** y su dual, la **600-celda**.

¿Y en dimensión mayor? La clasificación es aún más sencilla. En cualquier dimensión ***n***>4 sólo hay los tres poliedros regulares “triviales”: símplice, hipercubo (bola unidad L_{inf}) y su dual (politopo cruzado, o bola unidad L_1)