TEMA II
TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS

Policarpo Abascal Fuentes

TEMA II

2. TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS

Bibliografía

Rojo, A.D.,
Álgebra I,
Editorial Ateneo

Queysanne, M.,
Álgebra Básica,
Vicens Vives

Burgos, J. de,
Álgebra lineal,
Mc-Graw Hill

2.1 CONJUNTOS

DEFINICIÓN 1 *Conjunto es una colección de elementos verificando las siguientes reglas:*

- *está bien definido, es decir, posee un criterio que permite afirmar si un elemento a está o no en el conjunto.*
  Cuando un elemento está en el conjunto lo representaremos por $a \in A$ *y diremos que* a *pertenece a* A.
- *Un mismo objeto matemático no puede ser a la vez un conjunto y un elemento de si mismo; o sea, no se puede decir que* $a \in a$ *ni* $A \in A$.
- *La colección de todos los conjuntos no es un conjunto. Si quisiéramos alguna vez referirnos a dicho colección, diremos "la clase de todos los conjuntos".*

2.1 CONJUNTOS

Los conjuntos se pueden determinar utilizando dos métodos:

- Enumeración o extensión. Consiste en definir los conjuntos escribiendo todos sus elementos. Como ejemplos tenemos:

$$A = \{1, 3, 33, 107\} \text{ ó } B = \{a, b, c\}$$

- Comprensión. Consiste en definir el conjunto a partir de propiedades que verifican los elementos; por ejemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2 \cdot p \text{ con } p \in \mathbb{Z}\} \text{ ó } B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$$

Un conjunto notable es el conjunto vacío, que denotaremos por $\emptyset$ y es el conjunto que no posee ningún elemento; o sea $\emptyset = \{\}$

2.1 CONJUNTOS

DEFINICIÓN 2 *Sean A y B dos conjuntos, diremos que A está contenido en B y lo denotaremos por $A \subseteq B$, si se verifica que todo elemento de A es a su vez elemento de B; o sea,*

$$\forall a \in A, a \in B$$

DEFINICIÓN 3 *Sean A y B dos conjuntos, diremos que A es un subconjunto de B, si se verifica que $A \subseteq B$. Así mismo se llaman subconjuntos propios de A a los subconjuntos distintos del $\emptyset$ y de A.*

NOTA 1 *Se deducen de las definiciones tres hechos importantes:*

- *$\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A.*
- *$A \subseteq A$ para todo conjunto A.*
- *Dos conjunto A y B son iguales, si y solamente si, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

2.1 CONJUNTOS

DEFINICIÓN 4 *Dado un conjunto* A*, se llama partes de* A *y lo denotaremos por* $\mathcal{P}(A)$ *al conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de* A*; o sea,* $\mathcal{P}(A) = \{X / X \subseteq A\}$

EJEMPLO 1 *Sea* $A = \{a, b, c\}$*, se tiene que*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

2.1.1 Operaciones con conjuntos

DEFINICIÓN 5 *Dados A y B dos conjuntos, se llama producto cartesiano de A por B, y se denota por $A \times B$, al conjunto formado por parejas de un elemento de A y uno de B. Dichas parejas las denotaremos por (a, b).*

$$A \times B = \{(a, b) \text{ con } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

DEFINICIÓN 6 *Sean A y B dos conjuntos, se llama conjunto unión de A y de B, y se denota por $A \cup B$, al conjunto*

$$A \cup B = \{c / c \in A \text{ ó } c \in B\}$$

DEFINICIÓN 7 *Sean A y B dos conjuntos, se llama conjunto intersección de A y de B, y se denota por $A \cap B$, al conjunto*

$$A \cap B = \{c / c \in A \text{ y } c \in B\}$$

2.1.1 Operaciones con conjuntos

DEFINICIÓN 8 *Sean A y B dos conjuntos, se llama conjunto diferencia de A con B, y se denota por $A - B$, al conjunto*

$$A - B = \{a/a \in A \text{ y } a \notin B\}$$

DEFINICIÓN 9 *Sean A y B dos conjuntos, se llama conjunto diferencia simétrica de A y de B, y se denota por $A \bigtriangleup B$, al conjunto*

$$A \bigtriangleup B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

DEFINICIÓN 10 *Dados dos conjuntos $A \subset U$, se llama complementario de A respecto de U, y se denota por A^c, al conjunto*

$$A^c = \{c \in U/c \notin A\}$$

2.1.1 Operaciones con conjuntos

TEOREMA 1 *Sean* A, B, C *tres subconjuntos de un conjunto universal* U*, se verifican las siguientes propiedades:*

- *Idempotencia* $A \cup A = A$ *y* $A \cap A = A$.
- *Asociativas* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *y* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- *Conmutativas* $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$.
- *De identidad* $A \cup \emptyset = A, A \cup U = U, A \cap \emptyset = \emptyset$ *y* $A \cap U = A$.
- *De complementario* $A \cup A^c = U$ *y* $A \cap A^c = \emptyset$.
- *Involutiva* $(A^c)^c = A, \emptyset^c = U$ *y* $U^c = \emptyset$.
- *Leyes de De Morgan* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *y* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- *Distributivas* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *y* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2.2 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

DEFINICIÓN 11 *Se llama relación entre los conjuntos A y B a un subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$.*

Una relación $\mathcal{R} \subset A \times B$, pero si $(a, b) \in \mathcal{R}$ lo denotaremos por $a\mathcal{R}b$.

DEFINICIÓN 12 *Una relación binaria $\mathcal{R} : A \rightharpoondown A$, se dice:*

I) *Reflexiva.- Para todo $a \in A$, se tiene que $a\mathcal{R}a$.*

II) *Simétrica.- Si $a_1\mathcal{R}a_2$, entonces $a_2\mathcal{R}a_1$.*

III) *Antisimétrica.- Si $a_1\mathcal{R}a_2$ y $a_2\mathcal{R}a_1$, entonces se tiene que $a_1 = a_2$.*

IV) *Transitiva.- Si $a_1\mathcal{R}a_2$ y $a_2\mathcal{R}a_3$ entonces se tiene que $a_1\mathcal{R}a_3$.*

V) *Total.- Para toda pareja de elementos a_1 y a_2 se tiene que, o bien $a_1\mathcal{R}a_2$, o bien $a_2\mathcal{R}a_1$.*

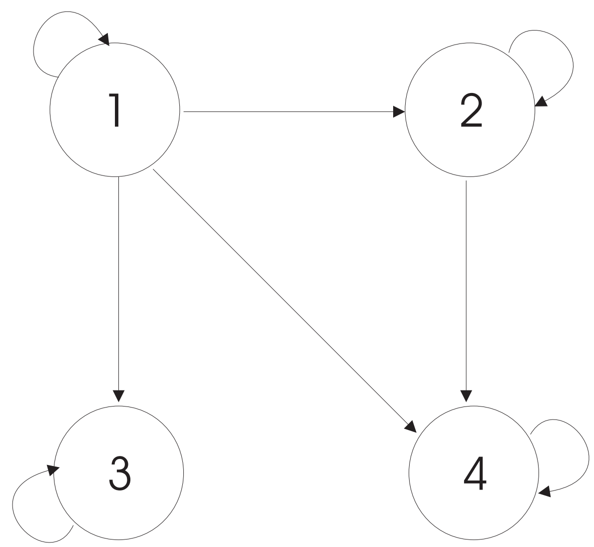
Se dice que $\mathcal{R}$ es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. Se dice que $\mathcal{R}$ es de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si además es total se dice que es de orden total.

2.2.1 Representación de relaciones

IV **Grafo**.

Supongamos que sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se define la relación aRb si y sólo si a es divisor de b, es decir,

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$$



2.2.2 Relaciones de equivalencia

DEFINICIÓN 13 *Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea $a \in A$, se llama clase de equivalencia de a al conjunto*

$$[a] = \{a_1 \in A / a\mathcal{R}a_1\}$$

TEOREMA 2 *Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre A, definen una partición del conjunto A, o sea,*

I) $\displaystyle\bigcup_{a \in A} [a] = A.$

II) *Si* $[a_1] \neq [a_2]$, *entonces* $[a_1] \cap [a_2] = \emptyset.$

DEFINICIÓN 14 *Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida sobre A, se llama conjunto cociente de A por $\mathcal{R}$ al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de los elementos de A, o sea,*

$$A/\mathcal{R} = \{[a] \text{ con } a \in A\}$$

2.2.3 Relaciones de orden

DEFINICIÓN 15 *Al par $(L, \mathcal{R})$ lo denominaremos conjunto parcialmente ordenado, y si $\mathcal{R}$ es de orden total, lo llamaremos conjunto totalmente ordenado. $\mathcal{R}$ se suele representar como $\leq$.*

DEFINICIÓN 16 *Sea $(L, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, diremos que un elemento $a \in L$ es un minimal (maximal) si verifica que No existe $c \in L$ distinto de a tal que $c \leq a$ ($a \leq c$)*

TEOREMA 3 *Si $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío y finito, entonces tiene al menos un elemento maximal y un elemento minimal.*

DEFINICIÓN 17 *Sea $(L, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, diremos que $a \in L$ es el mínimo (máximo) si verifica que para todo $c \in L$ entonces $a \leq c$ ($c \leq a$)*

TEOREMA 4 *Un conjunto parcialmente ordenado tiene a lo sumo un máximo y un mínimo.*

2.2.3 Relaciones de orden

Diagrama de Hasse

I) Se sitúan en la parte inferior del dibujo los elementos minimales.

II) A continuación se sitúan en el siguiente nivel los elementos que verifican:

   I. Alguno del nivel anterior está relacionado con ellos.
   II. No hay ningún elemento intermedio entre ambos.

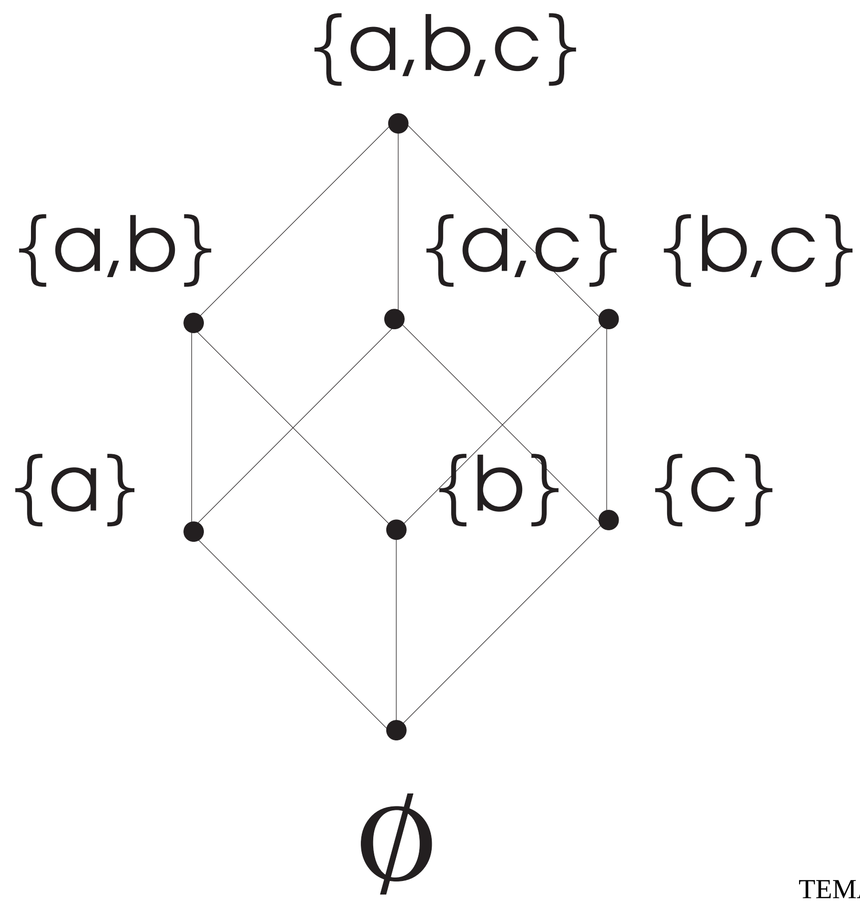
III) A continuación se dibujan líneas entre los elementos del nivel anterior y los de este nivel que estén relacionados.
Nota. Se dibujarán líneas entre niveles no consecutivos, únicamente si ellos están relacionados, y no hay ningún elemento intermedio.

IV) Si no hemos colocado todos los elementos de L, entonces volvemos al apartado II).

2.2.3 Relaciones de orden

Ejemplo de construcción de diagrama de Hasse

Sea $A = \{a, b, c\}$ y en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ se toma $\mathcal{CRD} \Leftrightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$



2.2.3 Relaciones de orden

Ejemplos

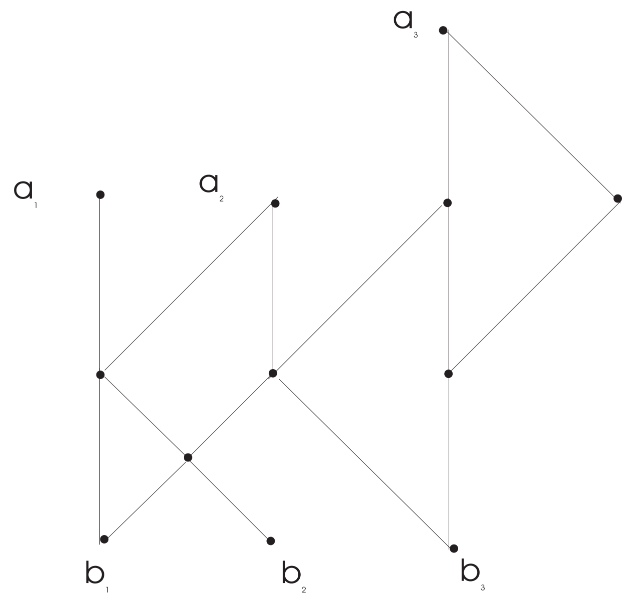


Figura 2: Conjunto parcialmente ordenado sin máximo ni mínimo.

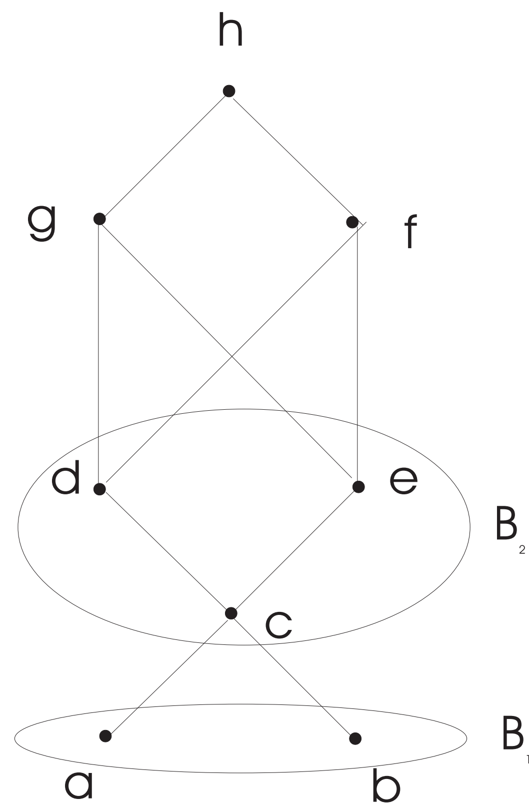


Figura 3: Elementos característicos de $B_1 = \{a, b\}$ y $B_2 = \{c, d, e\}$.

2.2.3 Relaciones de orden

DEFINICIÓN 18 *Sea* $(L, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado, y sea* B *un subconjunto de él, se dice que un elemento* a *de* L *es una cota inferior (superior) de* B*, si verifica:*
Para todo $c \in B$ *se tiene que* $a \leq c$ *(*$c \leq a$*).*

DEFINICIÓN 19 *Sea* $(L, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado, y sea* B *un subconjunto de él, se dice que un elemento* a *de* L *es el ínfimo (supremo) de* B*,* $\text{ínf}(B)$ *(*$\sup(B)$*), si es la mayor (menor) de las cotas inferiores (superiores); o sea,*

I. *Es una cota inferior (superior):*
   $a \leq b$ *para todo* $b \in B$*.*

II. *Es la mayor (menor) de las cotas inferiores (superiores):*
   Si $c \in L$ *es una cota inferior (superior), entonces,* $c \leq a$ *(*$a \leq c$*).*

2.3 APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

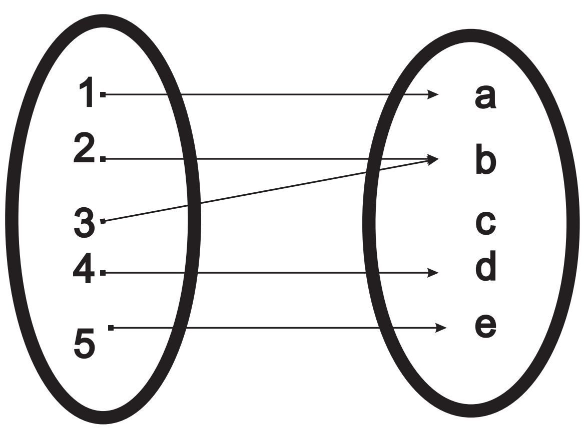
DEFINICIÓN 20 *Sean A y B dos conjuntos, se llama aplicación (o función) de A en B, y lo denotaremos por $f : A \longrightarrow B$ a una regla que a cada elemento de A le asigna un elemento de B.*

Denotaremos por $f(a)$ al elemento de B que se le asigna a a y lo llamaremos imagen de a.

Al conjunto A se le denomina dominio (o conjunto de partida) de f.

Al conjunto B se le denomina codominio (o conjunto de llegada) de f.

Como ejemplos de aplicaciones tenemos:



$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

2.3 APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

DEFINICIÓN 21 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación, se llama imagen de f al conjunto Im$(f) = f(A) = \{b \in B / \exists a \in A$ con $b = f(a)\}$*

DEFINICIÓN 22 *Se llama imagen de A_1 al conjunto formado por aquellos elementos de B, que son asignados a algún elemento de A_1; o sea,*

$$f(A_1) = \{b \in B / \exists a \in A_1 \text{ con } b = f(a)\}$$

DEFINICIÓN 23 *Sea $B_1 \subseteq B$ se llama imagen inversa (o antiimagen) de B_1 al conjunto formado por aquellos elementos de A que se les asigna un elemento de B_1; o sea,*

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A / f(a) \in B_1\}$$

Usando los ejemplos se obtiene

$$f^{-1}(\{a, b, e\}) = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$g^{-1}(\{y \in \mathbb{R} / y \geq 4\}) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2\}$$

2.3 APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

DEFINICIÓN 24 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación del conjunto A en el conjunto B:*

- *Se dice que f es inyectiva si verifica:*

$$\text{Si } f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$$

  o también esta propiedad se puede poner como

$$\text{Si } a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

- *Se dice que f es suprayectiva (sobreyectiva o epiyectiva), si verifica:*

$$\forall b \in B \text{ existe } a \in A \text{ tal que } b = f(a)$$

  o lo que es lo mismo, $Im(f) = B$.

- *Se dice que f es biyectiva si verifica que es inyectiva y suprayectiva.*

$$f(x) = 2x + 3$$

2.3 APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

DEFINICIÓN 25 *Sean* $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : C \longrightarrow D$ *dos aplicaciones tales que* $Im(f) \subset C$, *se llama composición de* f *con* g, *y se denota por* $g \circ f$, *a la aplicación* $g \circ f : A \longrightarrow C$ *definida por*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

DEFINICIÓN 26 *Se llama aplicación identidad del conjunto* A *a la aplicación de* A *en* A *tal que* $Id_A(a) = a$ *para todo* $a \in A$

DEFINICIÓN 27 *Dada una aplicación* $f : A \longrightarrow B$, *diremos que es un isomorfismo de conjuntos si existe otra aplicación* $g : B \longrightarrow A$ *tal que*

$$g \circ f = Id_A \qquad y \qquad f \circ g = Id_B$$

TEOREMA 5 *Una aplicación* $f : A \longrightarrow B$ *es un isomorfismo si y solamente si es una biyección.*

2.4 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

DEFINICIÓN 28 *Dado un conjunto diremos que es el conjunto de los números naturales (que denotaremos por $I\!\!N$) si verifica que existe un elemento 0 y una aplicación $\sigma : I\!\!N \longrightarrow I\!\!N$ tal que:*

- *No existe ningún $n \in I\!\!N$ tal que $\sigma(n) = 0$.*
- *La aplicación σ es inyectiva.*
- *Si S es un subconjunto de $I\!\!N$ tal que $0 \in S$ y para todo $n \in S$ se tiene que $\sigma(n) \in S$, entonces $S = I\!\!N$.*

NOTA: Hay muchos conjuntos que verifican estas propiedades: son diferentes representaciones de $I\!\!N$

2.4 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Principio de inducción

Sea una propiedad $\mathcal{P}$
$A = \{\mathcal{P}(n)$ con $n \in I\!N\}$ y
$S = \{\mathcal{P}(n)$ son ciertas $\} \subset A$

Paso Básico
$\mathcal{P}(0) \in S$

Paso Inductivo
Suponiendo que $\mathcal{P}(n) \in S$ **(Hipótesis de inducción)**
se comprueba que $\mathcal{P}(\sigma(n)) \in S$

Y por la tercera propiedad de los números naturales se tiene que $S = A$ y, por lo tanto, todas las proposiciones son ciertas.

2.4 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Ejemplos de definiciones recurrentes

1) Se define la función factorial a partir de las siguientes reglas recurrentes:

   I) $0! = 1$

   II) $(\sigma(n))! = \sigma(n) \cdot (n!)$

2) Se define la sucesión de números naturales $\{a_n\}_{n\in I\!N}$ a partir de las siguiente reglas recurrentes:

   I) $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$.

   II) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

   Sin recurrencia

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

2.5 CARDINALIDAD FINITA

DEFINICIÓN 29 *Dado un conjunto finito A, se llama cardinal de A, y lo denotaremos por $|A|$ (o Card(A)), al número de elementos que posee*

TEOREMA 6 *Si A es un conjunto finito, $|A| = n$, entonces tiene 2^n subconjuntos.*

TEOREMA 7 *Sean A y B dos conjuntos finitos, se tienen las siguientes relaciones:*

I) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

II) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

III) $|A \cap B| \leq \text{mín}\{|A|, |B|\}$.

IV) $|A - B| \leq |A|$.

V) $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.

2.5 CARDINALIDAD FINITA

COROLARIO 1 *Sean* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *una familia de* n *conjuntos finitos, entonces se verifica:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

TEOREMA 8 *Sean* A *y* B *dos conjuntos finitos, se verifica:* $|A| = |B|$ *si y solamente si existe una biyección de* A *a* B.

TEOREMA 9 *Sean* A *y* B *dos conjuntos finitos, si denotamos por* $Apl(A, B)$ *al conjunto formado por todas las aplicaciones de* A *en* B, *se tiene que* $|Apl(A, B)| = |B|^{|A|}$.

COROLARIO 2 *Si* S *es un conjunto finito, entonces* $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$.

2.6 CARDINALIDAD INFINITA

DEFINICIÓN 30 *Sean A y B dos conjuntos, definimos la relación $\approx$ de la siguiente manera: $A \approx B$, si, y solamente si, existe una aplicación biyectiva entre ambos.*
$[A] = |A|$ números cardinales.

DEFINICIÓN 31 *Un conjunto A se dice que es numerable si su cardinal coincide con el de los números naturales, o sea, $|A| = |\mathbb{N}|$.*

Ejemplos.-

I) {Números primos}

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{N} & \longrightarrow & \{\text{Números primos}\} \\ n & \longrightarrow & p_n \end{array}$$

donde p_n es el primo n-ésimo.

2.6 CARDINALIDAD INFINITA

Ejemplos.-

$\mathbb{Z} \to |\mathbb{Z}| = 2|\mathbb{N}| - 1$

$$\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ p & \longrightarrow & \begin{cases} n & \text{si } p = 2n \\ -n & \text{si } p = 2n-1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g_2 : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longrightarrow & \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -(2n+1) & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array}$$

Se verifica que $f_2 \circ g_2 =\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ y $g_2 \circ f_2 =\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

2.6 CARDINALIDAD INFINITA

Ejemplos.-

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (i,j) & \longrightarrow & \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g_3 : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ n & \longrightarrow & (n - \frac{m_n(m_n+1)}{2}, m_n - (n - \frac{m_n(m_n+1)}{2})) \end{array}$$

donde m_n es el mayor número natural tal que $\frac{m_n(m_n+1)}{2} \leq n$.

Se verifica que $f_3 \circ g_3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ y $g_3 \circ f_3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

2.6 CARDINALIDAD INFINITA

TEOREMA 10 *La unión finita o numerable de conjuntos numerables es numerable.*

TEOREMA 11 *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no es numerable*

Ejemplos de cardinales

$$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}| \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \neq \ldots \neq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\ldots \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ldots)) \neq \ldots$$