TEMA III
COMBINATORIA

Policarpo Abascal Fuentes

TEMA III

3. COMBINATORIA

3.1 PRINCIPIOS BÁSICOS

3.2 PERMUTACIONES

3.3 VARIACIONES

3.4 COMBINACIONES

3. COMBINATORIA

Bibliografía

Grimaldi, R.P.,
Matemáticas discretas y combinatoria,
Prentice Hall,

Johnsonbaugh, R.,
Matemáticas discretas,
Prentice Hall,

Rosen, K. J. ,
Matemática discreta y aplicaciones,
Mc-Graw Hill

3.1 Principios básicos

EJEMPLO 1 *Supóngase que en la cafetería de la escuela se ofertan los siguientes menús:*

- *hamburguesa*
- *hamburguesa con queso*
- *pizza*

Como bebidas posibles se permiten:

- *refresco*
- *agua*
- *cerveza*

Además puede elegirse postre:

- *yogur*
- *fruta*

¿Cuántos menús distintos están ofertando?

3.1 Principios básicos

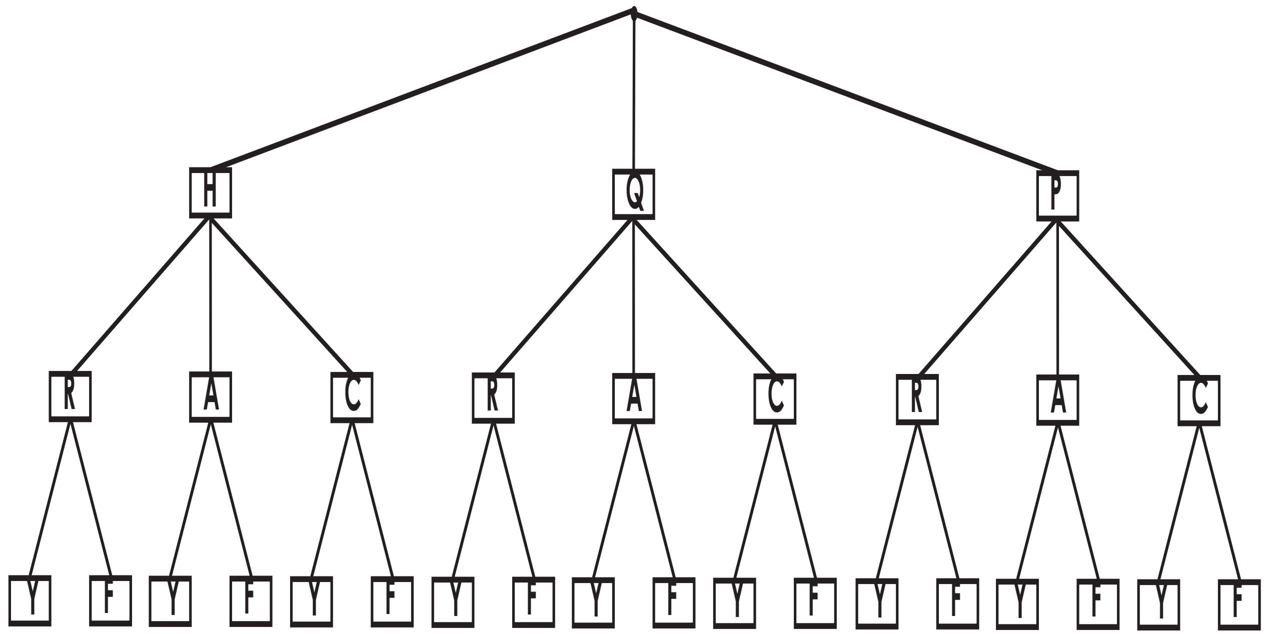

Figura 1: Gráfica del recuento del número de menús

Se obtienen 18 menús diferentes.

3.1 Principios básicos

TEOREMA 1 (Principio de la suma) *Supóngase que tenemos p conjuntos A_1, A_2,...,A_p tales que el cardinal de A_i es n_i y tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces el número de elementos posibles que pueden elegirse de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_p$ es $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$*

EJEMPLO 1 *Un profesor de lenguajes de programación tiene 4 libros de C, 5 de Fortran y 2 de Cobol ¿cuántos libros distintos puede recomendar a sus alumnos?*
El número de libros distintos a recomendar son
$4 + 5 + 2 = 11$

3.1 Principios básicos

TEOREMA 2 (Principio de la multiplicación) *Si una actividad puede realizarse en p pasos sucesivos y el paso i-ésimo se puede realizar de n_i formas diferentes, el número de actividades diferentes que se pueden realizar es $n_1 n_2 \ldots n_p$*

En el ejemplo 1 tenemos 3 pasos

- 3 formas distintas
- 3 formas distintas
- 2 formas distintas

El número de menús distintos a componer son $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

3.1 Principios básicos

EJEMPLO 2 *Un comité de 6 personas compuesto por Ana, Belén, Carlos, Diego, Elena y Felipe debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.*

- *¿De cuántas formas puede hacerse esto?*
- *¿De cuántas formas puede hacerse esto si debe ser presidente Ana o Belén?*
- *¿De cuántas formas puede hacerse esto si Elena debe ocupar uno de los puestos?*
- *¿De cuántas formas puede hacerse esto si Diego y Felipe deben tener alguno de los puestos?*

La actividad se realiza en tres pasos, Asignar puesto a Diego, asignar puesto a Felipe y completar el puesto restante $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ *posibilidades distintas de ordenación.*

3.2 Permutaciones

DEFINICIÓN 1 *Se considera un conjunto con* n *elementos distintos, una* ***permutación*** *de dicho conjunto es un ordenamiento de los mismos.*

EJEMPLO 3 *¿Cuántas permutaciones distintas de las letras* A*,* B *y* C *existen? ¿cuáles son?*

TEOREMA 3 *El número de permutaciones de* n *elementos que existen son* $P_n = n!$*.*

EJEMPLO 4 *¿Cuántas permutaciones de las letras A,B,C,D,E,F contienen la cadena DEF?*

Tomando la cadena DEF como un único elemento, el número de permutaciones que tienen esta cadena es $4! = 24$.

3.2 Permutaciones

DEFINICIÓN 2 *Sea un conjunto de m elementos, entre los que existen α_1 objetos iguales, otros α_2 iguales y distintos de los anteriores, y así sucesivamente hasta n grupos de elementos. Las permutaciones distintas que pueden hacerse de este conjunto, teniendo en cuenta que los elementos de cada grupo son indistinguibles entre si recibe el nombre de* ***permutaciones de*** m ***elementos con repetición de*** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$

TEOREMA 4 *El número de permutaciones de m elementos con repetición de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ es*

$$P_m^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} \text{ donde}$$

$$m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

3.2 Permutaciones

EJEMPLO 5 *Debemos repartir dos procesos de tipo A, tres de tipo B y cinco de tipo C entre 10 procesadores distintos ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer si exigimos que ningún procesador quede libre?*

Serían permutaciones del conjunto $\{A, A, B, B, B, C, C, C, C, C\}$, es decir:

$$P_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{2!3!5!} = 2520$$

3.3 Variaciones

DEFINICIÓN 3 *Dado un conjunto formado por* m *elementos distintos, llamaremos* ***Variación de orden n*** *a cualquier ordenación de un subconjunto suyo de cardinal* n.

EJEMPLO 6 *Dado el conjunto* $\{A, B, C\}$ *calcule todas las variaciones de orden 2 de dicho conjunto*

TEOREMA 5 *El número de variaciones de orden n de un conjunto con m elementos es*

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) \left(= \frac{m!}{(m-n)!}\right)$$

3.3 Variaciones

DEFINICIÓN 4 *Se considera un conjunto de cardinal m, llamaremos* ***variación con repetición*** *de orden n a cualquier grupo ordenado formado por n elementos, no necesariamente distintos, tomados entre todos los del conjunto.*

TEOREMA 6 *El número total de variaciones con repetición de m elementos de orden n es $V^R_{m,n} = m^n$*

EJEMPLO 7 *Suponiendo que en una liga de fútbol consta de 14 partidos en cada jornada del campeonato ¿cuántas quinielas sería necesario cumplimentar para tener la certeza de conseguir un pleno? ¿Cuántas de esas quinielas tendrían un premio por 13 aciertos?*

El número de quinielas con exactamente 13 aciertos son $14 \cdot 2 = 28$

3.4 Combinaciones

DEFINICIÓN 5 *Dado un conjunto con cardinal m llamaremos **combinación** de orden n a cualquier subconjunto con n elementos de dicho conjunto.*

TEOREMA 7 *El número total de combinaciones de orden n que pueden formarse con m elementos es*

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

DEFINICIÓN 6 *Dados dos números naturales tales que $0 \leq n \leq m$ se llama **número combinatorio** o **coeficiente binomial** al cociente*

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

3.4 Combinaciones

TEOREMA 8 (del binomio) *Si x e y son dos variables tales que $xy = yx$ y n es un entero positivo, entonces:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

TEOREMA 9 *Sea $n \in I\!N$, entonces se cumple:*

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad\qquad \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

3.4 Combinaciones

TEOREMA 10 *Supóngase que* n *y* m *son dos naturales tales que* $0 \leq n \leq m$, *entonces*

1. $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = 1$
2. $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{N}$
3. $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m-n \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$

3.4 Combinaciones

NOTA 1 (El triángulo de Pascal) *De la propiedad* **??** *se deduce un esquema de cálculo:*

$$m = 1 \qquad 1 \quad 1 \qquad\qquad \binom{1}{0} \; \binom{1}{0}$$

$$m = 2 \qquad 1 \quad 2 \quad 1 \qquad\qquad \binom{2}{0} \; \binom{2}{1} \; \binom{2}{2}$$

$$m = 3 \qquad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \qquad\qquad \binom{3}{0} \; \binom{3}{1} \; \binom{3}{2} \; \binom{3}{3}$$

$$m = 4 \qquad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \qquad\qquad \binom{4}{0} \; \binom{4}{1} \; \binom{4}{2} \; \binom{4}{3}$$

$$m = 5 \qquad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \qquad\qquad \binom{5}{0} \; \binom{5}{1} \; \binom{5}{2} \; \binom{5}{3} \; \binom{5}{4}$$

$$m = 6 \qquad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \qquad\qquad \binom{6}{0} \; \binom{6}{1} \; \binom{6}{2} \; \binom{6}{3} \; \binom{6}{4}$$

3.4 Combinaciones

DEFINICIÓN 7 *Dado un conjunto de cardinal m cuyos elementos son distintos dos a dos, llamaremos* **combinación con repetición de orden n** *a cualquier grupo de n elementos del conjunto, distintos o iguales, considerando grupos iguales los formados por los mismos elementos repetidos el mismo número de veces.*

TEOREMA 11 *Dado un conjunto de cardinal m, el número de combinaciones con repetición de orden n es*

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

3.4 Combinaciones

EJEMPLO 8 *¿Qué valor tomará la variable* `m` *tras ejecutarse el siguiente fragmento de programa de MATLAB?*

```
m=0
  for k=1:20
    for j=1:k
      for i=1:j
        m=m+1
      end
    end
  end
```

$$C^R_{20,3} = \binom{20+3-1}{3} = 1540$$

3.4 Combinaciones

TEOREMA 12 (multinomial) *Sean* $n, p \in I\!N$, *entonces el coeficiente de* $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}$ *en el desarrollo de* $(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n$ *es*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_p!}$$

donde cada $n_i \in I\!N$ *y verifica* $0 \leq n_i \leq n$ *para todo* $1 \leq i \leq p$ *y* $n_1 + n_2 + \cdots n_p = 0$.

EJEMPLO 9 *¿Cuál es el coeficiente de* $a^2 b^3 c^2 d^5$ *en el desarrollo de* $(a + 2b - 3c + 2d + 1)^{15}$*?*

$$\frac{15!}{2!3!2!5!3!}(1)^2(2)^3(-3)^2(2)^5(1)^3 = 174356582400$$