PROBLEMAS DEL TEMA 1.- LÓGICA

Ejercicio 1 *Sean las proposiciones* $p \equiv$ **hace frio** *y* $q \equiv$ **está lloviendo**. *Formular las siguientes afirmaciones lógicas:*

1. $\sim p$
2. $p \wedge q$
3. $p \vee q$
4. $q \wedge \sim p$
5. $\sim p \wedge \sim q$
6. $\sim\sim q$

Ejercicio 2 *Escribir las sentencias lógicas correspondientes a:*

1. *Una relación es de equivalencia si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.*
2. *Si la humedad es alta lloverá esta tarde o esta noche.*
3. *El cáncer no se cura a menos que se determine la causa y se encuentre un nuevo fármaco.*
4. *Se requiere valor y preparación para escalar esta montaña.*
5. *Si es un hombre que hace campaña dura, probablemente, será elegido.*

Ejercicio 3 *Identifique las proposiciones atómicas de las siguientes oraciones y reemplácelas por símbolos proposicionales. Después, traduzca las oraciones al cálculo proposicional.*

1. *Si no te vas, llamaré a la policía.*
2. *Dos niños tienen los mismos tíos si y sólo si tienen la misma madre y el mismo padre.*
3. *Es un día agradable si está soleado, pero sólo si no hace calor.*
4. *Si* $i > j$, *entonces* $i - 1 > j$, *sino* $j = 3$.

Ejercicio 4 *Dado el siguiente texto:*

> Si el ordenador es barato entonces ningún periférico funcionará o el procesador será lento. Si algún periférico funciona entonces el ordenador será barato y compraré el ordenador. Si no compro el ordenador entonces algún periférico funcionará o el procesador será lento. El procesador no es lento y el ordenador es barato.

¿Se puede deducir que Compraré el ordenador*?*

Ejercicio 5 *Verificar mediante tablas de verdad y mediante reglas de sustitución las siguientes equivalencias:*

- $p \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
- $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
- $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
- $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow [\sim r \rightarrow (p \rightarrow q)]$
- $p \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim p \vee r)$
- $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow q \wedge (p \vee r)$
- $\sim ((\sim p \wedge q) \vee p) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$
- $\sim (\sim p \vee \sim (r \vee s)) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s)$
- $(p \vee r) \wedge (q \vee s) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge s) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge s)$

Ejercicio 6 *Dada la proposición $P(x) \equiv x^2 = 2x$ donde el universo de discurso es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, determinar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:*

1. $P(0)$
2. $P(1)$
3. $P(-2)$
4. $P(2)$
5. $\exists x P(x)$
6. $\forall x P(x)$

Ejercicio 7 *En el dominio de discurso de los números reales, determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados:*

A) $\forall x \; x > 0$

B) $\forall x \; x^2 < 0$

C) $\exists x$ *tal que* $x^2 > 0$

D) $\exists x$ *tal que* $x + 2 = x$

E) $\forall x \; \forall y \; (x - 7 = 2 \wedge y \geq 9 \rightarrow x \leq y)$

Ejercicio 8 *Determinar, justificando la respuesta, el valor de verdad de las siguientes afirmaciones considerando que el dominio de discurso es el conjunto de los números reales.*

1. *Para cada x, para cada y, $x^2 + y^2 = 9$.*
2. *Para cada x, para alguna y, $x^2 + y^2 = 9$.*
3. *Para alguna x, para cada y, $x^2 + y^2 = 9$.*
4. *Para alguna x, para alguna y, $x^2 + y^2 = 9$.*
5. *Para cada x, para cada y, $x^2 + y^2 \geq 0$.*
6. *Para cada x, para alguna y, $x^2 + y^2 \geq 0$.*
7. *Para alguna x, para cada y, $x^2 + y^2 \geq 0$.*
8. *Para alguna x, para alguna y, $x^2 + y^2 \geq 0$.*
9. *Para cada x, para cada y, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.*
10. *Para cada x, para alguna y, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.*
11. *Para alguna x, para cada y, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.*
12. *Para alguna x, para alguna y, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.*

Ejercicio 9 *Negar los siguientes argumentos:*

A) $\exists x$ *tal que* $(P(x) \vee \sim Q(x))$

B) $\forall x \; (P(x) \rightarrow Q(x))$

C) $\forall y \exists x$ *tal que* $xy = 0$

D) $\forall x \exists y$ *tal que* $(P(x) \rightarrow M(y, x) \wedge I(y, f(x)))$

E) $\exists x \in \mathbb{Z}$ *tal que* $x^3 + 1 = (x + 1)^3$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 10 *Sean las proposiciones* $p \equiv$ **él es alto** *y* $q \equiv$ **él es bien parecido**. *Usando* p *y* q, *expresar en forma lógica estas afirmaciones:*

1. *Él es alto y bien parecido.*
2. *Él es alto pero no bien parecido.*
3. *Él es alto o bajo y bien parecido.*
4. *Es falso que él sea bajo y bien parecido.*
5. *Él no es alto ni bien parecido.*
6. *No es verdad que él sea bajo y no bien parecido.*

Ejercicio 11 *Dada la asignación de significados para las variables proposicionales:*

p: necesita un doctor
q: necesita un abogado
r: tiene un accidente
s: está enfermo
t: es injuriado

Expresar en castellano las siguientes sentencias:

1. $(s \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q)$
2. $p \rightarrow (s \vee t)$
3. $(p \wedge q) \leftrightarrow (s \wedge t)$
4. $(p \wedge q) \rightarrow r$
5. $\sim (s \vee t) \rightarrow \sim p$

Ejercicio 12 *Escriba la tabla de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:*

1. $p \wedge \sim q$
2. $(\sim p \vee \sim q) \vee p$
3. $(p \vee q) \wedge \sim p$
4. $(p \wedge q) \wedge \sim p$
5. $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee q)$
6. $\sim (p \wedge q) \vee (r \wedge \sim p)$
7. $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
8. $\sim (p \wedge q) \vee (q \vee r)$
9. $p \rightarrow \sim p$
10. $\sim (\sim p) \rightarrow p$
11. $p \rightarrow (p \wedge q)$
12. $\sim (p \vee q) \vee \sim q$
13. $(p \vee q) \rightarrow p$
14. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
15. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
16. $p \vee (q \rightarrow \sim p)$
17. $(p \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow p$
18. $p \vee (q \rightarrow \sim p)$

Ejercicio 13 *En la siguiente tabla se exponen los valores de las variables lógicas P, Q y R y de dos funciones o fórmulas lógicas F y G.*

P	Q	R	F	G
V	V	V	F	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Encontrar las expresiones lógicas representadas por F y G.

Ejercicio 14 *¿Son las siguientes expresiones tautologías?*

1. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
2. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
4. $((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$
5. $(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$
6. $(q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p$

Ejercicio 15 *Comprobar las siguientes tautologías:*

1. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
2. $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
3. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
4. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
5. $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (\sim q \vee r)$
6. $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
7. $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$
8. $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)) \Leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow s$

Ejercicio 16 *Siendo ciertas las premisas $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$ y $R \Rightarrow P$. Demostrar que $P \Leftrightarrow Q$ usando solamente el silogismo hipotético y la ley de la introducción de equivalencias.*

Ejercicio 17 *Expresar mediante operadores y cuantificadores, las siguientes proposiciones, en el universo de discurso o dominio de discurso que se indica.*

A) *Todo entero es un número impar.* ($D = \mathbb{Z}$).

B) *Conocerla es amarla.* ($D = \{Personas\}$).

C) *Algunas personas no tienen amigos.* ($D = \{Personas\}$).

D) *Ninguna CPU que tenga mas de 5 años será actualizada si está averiada.* ($D = \{Cosas\}$).

E) *Si la suma de 2 primos es par entonces ninguno será 2.* ($D = \mathbb{N}$).

F) *Todos los estudiantes afeitan a Juan si y sólo si Juan no se afeita a si mismo.* ($D = \{Personas\}$).

Ejercicio 18 *Sean $p(x)$ y $q(x)$ las siguientes proposiciones abiertas definidas en el universo de los números enteros $\mathbb{Z}$:*

$p(x) := x \leq 3$ $\qquad$ $q(x) := x + 1$ *es impar*

A) *Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:*

1. $p(1)$
2. $q(1)$
3. $\sim p(3)$
4. $q(6)$
5. $p(7) \vee q(7)$
6. $p(3) \wedge q(4)$
7. $p(4)$
8. $\sim (p(-4) \vee q(-3))$
9. $\sim p(-4) \wedge \sim q(-3))$

B) Ahora, sea $r(x) := x > 0$. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. $p(3) \vee [q(3) \vee \sim r(3)]$
2. $\sim p(3) \wedge [q(3) \vee r(3)]$
3. $p(2) \rightarrow [q(2) \rightarrow r(2)]$
4. $[p(2) \wedge q(2)] \rightarrow r(2)$
5. $p(0) \rightarrow [\sim q(-1) \leftrightarrow r(1)]$
6. $[p(-1) \leftrightarrow q(-2)] \leftrightarrow r(-3)$

Ejercicio 19 *Formular los siguientes argumentos en forma simbólica y determinar si cada uno de ellos es válido.*

1. *Si estudio mucho o me vuelvo rico entonces obtengo un 10 en el examen. Obtengo un 10 en el examen. Por lo tanto si no estudio mucho me vuelvo rico.*
2. *Si estudio mucho entonces obtengo un 10 en el examen o me vuelvo rico. No obtengo un 10 en el examen y no me vuelvo rico. Por lo tanto no estudio mucho.*

Nota: *La validez de un razonamiento es independiente de su contenido.*

Ejercicio 20 *Dadas las tres premisas $\sim (p \wedge \sim q)$, $r \rightarrow p$ y $\sim (q \wedge \sim r)$, conclúyase $p \leftrightarrow q$.*

Ejercicio 21 *Dadas las siguientes afirmaciones, decidir si el resultado de negarlas es o no cierto.*

1. $\exists x \in I\!R$ *tal que* $\forall y > 0 \; x - y^2 < 0$
2. $\forall x \in I\!N \; \exists y \in I\!N$ *tal que* $x < y$
3. $\exists y \in I\!R \; \forall x \in I\!R \; x \cdot y \neq 0$
4. $\exists z \in \mathbb{Z}$ *tal que* $x^3 + y^3 = (x+y)^3 \; \forall y \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 22 *Verifíquese la validez del siguiente razonamiento:*

> *Si cojo frío me quedaré en la cama, y si me quedo en la cama no iré a ver el partido. Iré al médico o iré a ver el partido. Por lo tanto si no voy al médico entonces no he cogido frío.*

Ejercicio 23 *Dado el conjunto universal $I\!R$. Determínese el valor de verdad del resultado de negar los siguientes enunciados:*
a) $\forall x$, $\exists y$ *tal que* $|x| = y^2$; **b)** $\exists x$ *tal que* $\forall y$, $x = 0 \cdot y$; **c)** $\forall x \; \forall y$, $x^2 + y^2 \geq 0$.

PROBLEMAS DEL TEMA 2.- TEORÍA DE CONJUNTOS

Ejercicio 24 *Definir por extensión los conjuntos siguientes:*

1. *Números primos menores de 23.*
2. *Números naturales comprendidos entre 7 y 15.*
3. *Restos de la división entera por 6 de cualquier número natural.*
4. *El conjunto de los números pares.*

Ejercicio 25 *Definir por compresión los siguientes conjuntos:*

1. $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$
2. $B = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$

Ejercicio 26 *Demostrar que:*

1. $A \setminus B = A \cap B^c$
2. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C)$

Ejercicio 27 *Probar que* $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$

Ejercicio 28 *Determinar cuáles de las siguientes sentencias son ciertas; justifíquese la respuesta:*

i) $\emptyset \subset \emptyset$	*ii)* $\emptyset \subset \{\emptyset\}$	*iii)* $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
iv) $\emptyset \in \{\emptyset\}$	*v)* $\{\emptyset\} \in P(A)$	*vi)* $\{\{\emptyset\}\} \in P(A)$
vii) $A \cap P(A) = A$	*viii)* $A - P(A) = A$	*ix)* $P(A) - \{A\} = P(A)$
x) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$	*xi)* $\{a, \emptyset\} \subset \{a, \{a, \emptyset\}\}$	*xii)* $\{A\} \cap P(A) = \{A\}$
xiii) $\{A\} \cap P(A) = A$	*xiv)* $\{A\} \cup P(A) = P(A)$	

Ejercicio 29 *Sea* $\mathbb{Z}$ *el conjunto de los números enteros y sea* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *el producto cartesiano. Dadas las aplicaciones* $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, *y* $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, *definidas por* $f(x, y) = x - y$ *y* $g(x) = (x, -x)$. *Hallar la aplicación* $g \circ f$ *y justificar que* f *es suprayectiva,* g *inyectiva y* $g \circ f$ *ni suprayectiva, ni inyectiva.*

Ejercicio 30 *Sean* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $g : Y \longrightarrow Z$ *dos aplicaciones entre conjuntos; demostrar que:*
i) Si $g \circ f$ *es suprayectiva (o sobreyectiva), entonces* g *es suprayectiva (o sobreyectiva).*
ii) Si $g \circ f$ *es inyectiva entonces* f *es inyectiva.*
iii) Si $g \circ f$ *es inyectiva y* f *suprayectiva, entonces* g *es inyectiva.*

Ejercicio 31 *Sean* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *y* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que* $g(x) = x^2$ *y* $(g \circ f)(x) = x^4 + 2x^2 + 1$.
Se pide:

A) *Calcular* $f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

B) *Calcular* $(f \circ g)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

C) *Mediante un contraejemplo, comprobar que* f *no es suprayectiva.*

D) *Mediante un contraejemplo, comprobar que* $g \circ f$ *no es inyectiva.*

Ejercicio 32 *Sea* $f : X \longrightarrow X$ *y definimos la relación* R *en* X *por:*

$$xRy \iff y = f(x)$$

Probar que:
a) R *es reflexiva* $\Longleftrightarrow f = Id$.
b) R *es simétrica* $\Longleftrightarrow f^2 = Id$.
c) R *es transitiva* $\Longleftrightarrow f^2 = f$.
d) ¿Para qué función la relación inducida es de equivalencia ?

Ejercicio 33 *Supóngase que* S *y* T *son dos conjuntos y* $f : S \longrightarrow T$ *una aplicación de* S *en* T. *Sea* R_1 *una relación de equivalencia en* T, *y* R_2 *una relación binaria en* S *tal que* $(x, y) \in R_2$ *(o sea,* xR_2y*), si y sólo si* $(f(x), f(y)) \in R_1$.
Demostrar que R_2 *es también una relación de equivalencia.*

Ejercicio 34 *Se dice que una relación binaria* R *definida en el conjunto* C *es circular si verifica la siguiente propiedad: "si* $a\,R\,b$ *y* $b\,R\,c$ *entonces* $c\,R\,a$ *para cualesquiera* $a, b, c \in C$*".*
Demostrar:
i) Toda relación de equivalencia es circular.
ii) Si una relación binaria es reflexiva y circular, es también de equivalencia.
iii) Si una relación binaria es simétrica y circular, no es necesariamente de equivalencia. (Poner un ejemplo).

Ejercicio 35 *En* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *se define la siguiente relación:*

$$(a, b)R(c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad (2a + 1)2^d \leq (2c + 1)2^b$$

a) Comprobar que es una relación de orden.
b) ¿Es de orden total?
c) Ordenar de mayor a menor $(1, 3)$, $(4, 100)$, $(2, 1)$, $(9, 0)$, $(100, 4)$.
d) Calcular maximales, minimales, máximo y mínimo.

Ejercicio 36 *Sea* $f : A \longrightarrow B$ *una aplicación entre dos conjuntos* A *y* B. *Se pide:*
a) Demostrar que la siguiente relación R, *definida sobre* A, *es de equivalencia:*

$$xRy \iff f(x) = f(y)$$

b) Sea A/R *el conjunto cociente. Se denota por* $[x]$ *la clase de equivalencia. Se consideran las aplicaciones:*

$$\begin{array}{rcl} g : A & \longrightarrow & A/R \\ a & \longrightarrow & [a] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h : A/R & \longrightarrow & f(A) \\ {[a]} & \longrightarrow & f(a) \end{array}$$

Probar que g *es suprayectiva (epiyectiva) y* h *es inyectiva.*
c) ¿En que casos g *es inyectiva? ¿En que casos* h *es suprayectiva?*

Ejercicio 37 *Sea* $\mathbb{Z}$ *el conjunto de los números enteros. En el producto cartesiano* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *se define la relación:*

$$(a, b)R(c, d) \iff \begin{cases} a < c \\ \quad ó \\ a = c \quad y \quad b \leq d \end{cases}$$

Se pide:
a) Demostrar que R *es una relación de orden.*
b) Comprobar que es de orden total.
c) Ordenar de mayor a menor los pares (1,0) (0,0) (3,4) (3,-4) (1, -1).
d) Hallar los maximales, máximos, minimales y mínimos.
e) Se considera $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *Hallar las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo de* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, *siendo* $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

Ejercicio 38 *Sean* A *y* B *conjuntos finitos. Demostrar las siguientes cuestiones:*
i) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
ii) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$.
iii) $A - B = A - (A \cap B)$.
iv) $A - B = (A \cup B) - B$.

Ejercicio 39 *Pruébense las siguientes proposiciones:*
i) La unión finita de conjuntos numerables es numerable.
ii) La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
iii) El producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable.

Ejercicio 40 *Demostrar que el intervalo* $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *no es numerable.*

Ejercicio 41 *Probar que existe una biyección entre los intervalos reales* $[0,1]$ *y* $[0,2]$.

Ejercicio 42 *Demostrar por inducción que el número* $2^{2n}-1$ *es divisible por 3 para todo* $n \in N$ $(n \geq 1)$.

Ejercicio 43 *Sea una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = ax+b$ *con a y b reales. Demostrar que:*

$$(f \circ f \circ \overset{n)}{\cdots} \circ f)(x) = \begin{cases} a^n x + \dfrac{b(a^n-1)}{a-1} & si \;\; a \neq 1 \\ x + nb & si \; a = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 44 *Demostrar por inducción:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ejercicio 45 *La investigación de los números del tipo* $P(n) = n^2 - n + 41$ *con* $n \in \mathbb{N}$, *es capaz de hacernos pensar que estos números son primos* $\forall n \in \mathbb{N}$. *De hecho, P(0),P(1),. . . ,P(10) son primos.*

Elíjase una de las cuatro opciones siguientes:
a) Puesto que se verifica que $P(n)$ *es primo para* $n \leq 10$, *y además se observa que P(11),P(12),. . . ,P(20) también son primos, está claro que no hace falta comprobar más y se deduce que P(n) es primo* $\forall n \in \mathbb{N}$. *(En caso de elegir esta opción, enúnciese el principio que la justifica).*
b) Puesto que P(0) es primo, supongo que P(k) es primo y por el principio de inducción completa sustituyendo k por k+1:

$P(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) + 41$ *también es primo.*

En consecuencia P(n) es primo $\forall n \in \mathbb{N}$. *(Demuéstrese esta opción en caso de ser elegida).*
c) No es cierto que P(n) es primo $\forall n \in \mathbb{N}$. *(Razónese la respuesta en caso de elegir esta opción).*
d) El estudio de todos los valores de P(n) es un proceso infinito, por tanto imposible de realizar en un tiempo finito y en consecuencia no se puede evaluar la proposición. (En caso de elegir esta opción, enúnciese el principio que la justifica).

Ejercicio 46 *Dado un conjunto* $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,p\}$ *con una relación de orden cuyo diagrama de Hasse es el de la figura 1.*

1. *¿Es una relación de orden total?*
2. *Determinar maximales y minimales. ¿Existen máximos? y ¿mínimos?*
3. *Si consideramos el conjunto* $B = \{n,l,j\}$, *obtener cotas superiores e inferiores de B. Si tiene supremo e ínfimo, obtenerlos.*

Ejercicio 47 *Sea* $A = \{5,7,14,18,22,42,47,53\}$. *Sobre A se define la siguiente relación binaria* $\mathcal{R}$:

$$\forall a,b \in A \qquad a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \begin{cases} a < b \quad y \;\; m.c.d.(a,b) = 1 \\ \quad ó \\ a = b. \end{cases}$$

1) Pruébese que $\mathcal{R}$ *es una relación de orden sobre el conjunto A y representar su diagrama de Hasse.*

2) ¿Es de orden total?

3) Si $B = \{18,42,47\}$, *obténgase, en caso de que existan, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo.*

Ejercicio 48 *Dado el conjunto* $B = \{a,b,c,e,f,g\}$, *dense dos diagramas de Hasse que representen una relación de orden* $\mathcal{R}$ *en B tales que se verifique que e* **es minimal** *y* $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}c$, $e\mathcal{R}c$, $f\mathcal{R}b$, $f \not\mathcal{R} a$, $a \not\mathcal{R} f$, $b \not\mathcal{R} g$, $f\mathcal{R}g$, $g\mathcal{R}c$.

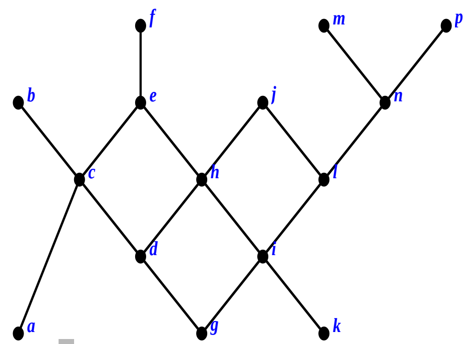


Figura 1: Diagrama de Hasse del problema 46

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 49 *Demostrar las leyes de De Morgan: a)* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ejercicio 50 *Sean A, B, C subconjuntos de U, y sea U el conjunto universal; comprobar que las siguientes igualdades son ciertas:*

i) $[(A \cap B) \cap C] \cup [(A \cap B) \cap C^c] \cup (A^c \cap B) = B$.
ii) $[A \cap (B \cap ((B \cap C)^c))^c] \cup [(A^c \cup B^c) \cup C]^c = A$.
iii) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = U$.

Ejercicio 51 *Sea un conjunto finito E y sea A un subconjunto de E. Sobre* $P(E)$ *se define la siguiente aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} f_A : P(E) & \longrightarrow & P(E) \\ X & \longrightarrow & A \cap X \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g_A : P(E) & \longrightarrow & P(E) \\ X & \longrightarrow & A \cup X \end{array}$$

Se pide contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Para qué elementos A de $P(E)$ *la aplicación* f_A *es inyectiva? ¿Y para cuales biyectiva?*
b)¿Para qué elementos A de $P(E)$ *la aplicación* g_A *es inyectiva? ¿Y para cuáles biyectiva?*
c) Sea $\begin{array}{rcl} h_A : P(E) & \longrightarrow & P(E) \\ X & \longrightarrow & X \cap A^c \end{array}$.

Hallar $h_A \circ f_A$, $f_A \circ h_A$, $g_A \circ h_A$ *y* $h_A \circ g_A$ *para todo A de* $P(E)$.

Ejercicio 52 *Sean las aplicaciones* $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ *y* $h : C \longrightarrow A$ *tales que* $h \circ g \circ f$ *es inyectiva y* $f \circ h \circ g$ *suprayectiva. Probar que f es biyectiva.*

Ejercicio 53 *Sea* $\mathbf{Z}^+$ *el conjunto de los numeros enteros estrictamente positivos. Fijado* $a \in \mathbf{Z}^+$, *se definen las siguientes aplicaciones:*

$$\begin{array}{rcl} f_a : \mathbf{Z}^+ & \longrightarrow & \mathbf{Z}^+ \\ x & \longrightarrow & m.c.d.(a, x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g_a : \mathbf{Z}^+ & \longrightarrow & \mathbf{Z}^+ \\ x & \longrightarrow & m.c.m.(a, x) \end{array}$$

Encontrar $a \in Z^+$ *para probar que las siguientes afirmaciones no son ciertas:*
a) f_a *es inyectiva.*
b) f_a *es suprayectiva.*
c) g_a *es inyectiva.*
d) g_a *es suprayectiva.*

Ejercicio 54 *Sean* $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow A$ *aplicaciones. Se pide:*

A) Probar que si f y g verifican $g \circ f = Id_A$ *entonces f es inyectiva y g es suprayectiva (sobreyectiva).*

B) Sean

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longrightarrow (a^3+3a^2, 3a+1) \qquad (x,y) \longrightarrow \sqrt[3]{x+y}-1$$

¿Verifican f y g la hipótesis del apartado anterior? ¿Verifican la tesis del mismo? Razónese la respuesta.

Ejercicio 55 *Sea P una relación binaria verificando las propiedades reflexiva y transitiva en el conjunto A. En ese conjunto se define la relación binaria R siguiente: $xRy \iff xPy$ e yPx.*
i) Demostrar que R es una relación de equivalencia.
ii) En el conjunto A/R se define la relación binaria S:
$[x]S[y] \iff xPy$
¿Qué tipo de relación es S?

Ejercicio 56 *Sea A un conjunto dotado con una relación de orden parcial $\leq$ y sea $B \subseteq A$. De las proposiciones siguientes probar las que son ciertas y demostrar la falsedad de las que no lo son mediante un contraejemplo:*
Si $A \neq \emptyset$ y finito
a) Si $n \in B$ y n es un maximal de B, entonces n es máximo de B.
b) Si $n \in B$ es maximal de B, entonces n es cota superior de B.
c) Si $n \in B$ es máximo de B, entonces n es cota superior de B.
d) Si $n \in B$ es máximo de B, entonces B tiene supremo y coincide con n.

Ejercicio 57 *Se consideran tres subconjuntos X, Y y Z del conjunto C. Se pide hallar el número de elementos del conjunto $X \cup Y \cup Z$ conociendo el número de elementos de los conjuntos X, Y, Z, $X \cap Y$, $X \cap Z$, $Y \cap Z$, y $X \cap Y \cap Z$. Como aplicación resolver el siguiente problema:*

En una encuesta hecha sobre 100 personas se ha comprobado lo siguiente:
40 leen el periódico ABC.
42 leen el periódico El Comercio.
45 leen el periódico El País.
23 leen el periódico ABC y El Comercio.
20 leen el periódico ABC y El País.
18 leen el periódico El Comercio y El País.
17 leen el periódico ABC, El Comercio y El País.

Se pide:
a) ¿Cuántas personas no leen ninguno de los periódicos?
b) ¿Cuántas personas leen únicamente el periódico ABC?
c) ¿Cuántas personas leen únicamente un sólo periódico?

Ejercicio 58 *Demostrar que los siguientes conjuntos no son numerables:*
i) El conjunto de todas las aplicaciones $f: \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$.
ii) El conjunto de las partes del conjunto $\mathbb{N}$.

Ejercicio 59 *Se dice que una relación binaria P definida sobre un conjunto E es de preorden, si es reflexiva y transitiva.*
Sea P una relación de preorden. Se considera la relación S definida sobre E por:

$$\forall\, x, y \in E \;\; x\,S\,y \;\Leftrightarrow\; x\,P\,y \;\; e \;\; y\,P\,x$$

a) Probar que S es una relación de equivalencia.
b) En el caso de que $E = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (siendo $\mathbb{R}$ = "Conjunto de los numeros reales") y la relación P este definida por:

$$(x,y)P(z,t) \;\Leftrightarrow\; x \leq z$$

Calcular la clase de equivalencia de un elemento cualquiera de E definido por S, así como su cardinal.

Ejercicio 60 *Probar que los intervalos de la forma $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$, no son numerables.*

Ejercicio 61 *Pruébese por inducción que la composición de n funciones inyectivas, $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$, es una función inyectiva. Obtener el mismo resultado para la sobreyectividad.*

Ejercicio 62 *Demostrar el principio de exclusión inclusión.*

Ejercicio 63 *Demostrar por inducción las siguientes desigualdades:*
a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 \ \leq \ \frac{n^3}{3} \ \leq \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n)^2$.
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 \ \leq \ \frac{n^4}{4} \ \leq \ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n)^3$.

Ejercicio 64 *Demostrar por inducción que para $n \geq 1$ se tiene:* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$

Ejercicio 65 *Demostrar por inducción que $\forall\ a, b \in \mathbf{R} - \{0\}$ con $b \neq 1$ se cumple:*

$$\sum_{j=0}^{n} ab^{jp} = \frac{ab^{(n+1)p} - a}{b^p - 1} \quad \forall\ p \neq 0$$

Ejercicio 66 *Demostrar por inducción:*

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$$

Ejercicio 67 *Dado un conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$ con una relación de orden cuyo diagrama de Hasse es el de la figura 2.*

1. *¿Es una relación de orden total?*
2. *Determinar maximales y minimales. ¿Existen máximos? y ¿mínimos?*
3. *Si consideramos el conjunto $B = \{k, j, h, i\}$, obtener cotas superiores e inferiores de B. Si tiene supremo e ínfimo, obtenerlos.*

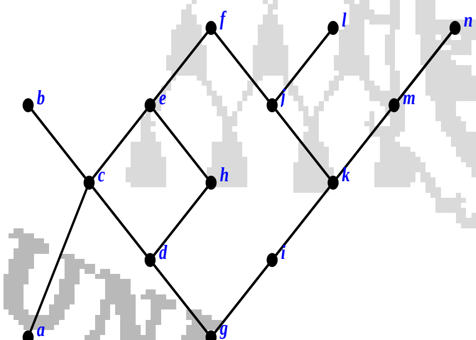


Figura 2: Diagrama de Hasse del problema 67

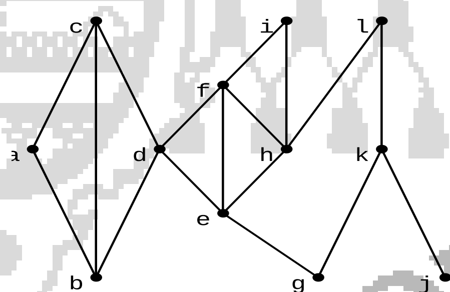


Figura 3: Diagrama de Hasse del problema 68

Ejercicio 68 *Dado un conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ con una relación de orden cuyo diagrama de Hasse es el de la figura 3.*

1. *¿Es una relación de orden total?*
2. *Determinar maximales y minimales. ¿Existen máximos? y ¿mínimos?*
3. *Si consideramos el conjunto $B = \{d, e, f, h\}$, obtener cotas superiores e inferiores de B. Si tiene supremo e ínfimo, obtenerlos.*

Ejercicio 69 *Demostrar que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\ \forall n \in I\!N$.

Ejercicio 70 *Demostrar que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (4i-3) = n(2n-1)\ \forall n \in I\!N$.

Ejercicio 71 *Dado el conjunto* $B = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ *ordenado parcialmente según la figura 4:*

1. *Hállense, en caso de existir, los elementos maximales y minimales de* B*. ¿Tiene máximo? ¿y mínimo?*
2. *Hállense dos subconjuntos de* B *en los que al menos los elementos* f *y* e *son cota superior.*
3. *Dado el conjunto* $\{c,d\} \subset B$*, hállense sus cotas inferiores y las superiores.*

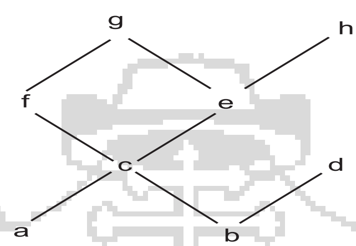


Figura 4: Diagrama de Hasse del problema 71

PROBLEMAS DEL TEMA 3.- COMBINATORIA

Ejercicio 72 *Un hombre tiene ocho camisas, cuatro pares de pantalones y cinco pares de zapatos ¿Cuántas combinaciones distintas de ropa puede hacer? ¿y si hay unos zapatos que no quiere combinar con unos pantalones?*

Ejercicio 73 *La información se almacena en la memoria principal de un ordenador en lo que se conoce como celdas o posiciones de memoria, de forma que a cada posición se le asigna una dirección compuesta por una lista ordenada de 8 símbolos. Cada símbolo es un dígito binario, 0 ó 1, y se denomina bit. El conjunto de los 8 bits se conoce como byte.*

1. *¿Cuántas direcciones diferentes se pueden formar?*
2. *¿Cuántas direcciones de memoria existen cuyo primer bit es 1 y terminen con dos bits iguales?*
3. *Un ordenador emplea direcciones de 2 bytes ¿cuántas direcciones diferentes se pueden formar?*

Ejercicio 74 *¿Cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer de las letras A, B, C, D, E, F que contengan las letras D, E, F juntas pero en cualquier orden?*

Ejercicio 75 *Consideremos la palabra CANALILLO.*

- *¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar con todas las letras de esa palabra?*
- *¿Cuántas de esas cadenas comienzan y terminan con la letra L?*
- *¿En cuántas cadenas del primer apartado aparecen juntas las tres letras L?*

Ejercicio 76 *En un juego de lotería, una apuesta consiste en marcar 6 números comprendidos entre 1 y 49. Se realiza el sorteo extrayendo 6 de los 49 números, que forman la denominada combinación ganadora; se extrae también un séptimo número, llamado el complementario, que sólo influye en las combinaciones con exactamente 5 aciertos.*

1. *¿Cuántas apuestas distintas se pueden hacer?*
2. *¿Cuántas formas hay de acertar 5 números y el complementario?*
3. *¿y de acertar 5 números sin el complementario.*
4. *¿y de acertar sólo 4 números?*
5. *¿y de acertar sólo un número?*
6. *¿y de no acertar ningún número?*
7. *Supóngase que sólo reciben premio los boletos que tienen acertados 3 números o más ¿hay más formas de recibir premio o de no recibir premio?*

Ejercicio 77 *Determine el valor de la variable entera* **cuenta** *después de la ejecución del siguiente segmento de programa de MATLAB:*

```
cuenta=0
for i=1:12
    for j=i:12
        for k=j:12
            cuenta=cuenta+3
        end
    end
end
```

Ejercicio 78 *¿Cuántos términos hay en el desarrollo de la expresión* $(x+y)(a+b+c)(e+f+g)(h+i)$*?*

Ejercicio 79 *Determine el coeficiente de*

1. xyz^2 *en* $(x+y+z)^4$
2. xyz^2 *en* $(w+x+y+z)^4$
3. xyz^2 *en* $(2x-y-z)^4$
4. xyz^{-2} *en* $(x-2y+3z^{-1})^4$
5. $w^3x^2yz^2$ *en* $(2w-x+3y-2z)^8$
6. $w^3x^2yz^2$ *en* $(2w-x+3y-2z)^6$

Ejercicio 80 *Determine la suma de todos los coeficientes de los desarrollos*

1. $(x+y)^3$
2. $(x+y+z)^{10}$
3. $(x+y)^{10}+(a+b)^6$

Ejercicio 81 *Demuestre las siguientes igualdades:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$
2. $\displaystyle\sum_{k\ par}\binom{n}{k}=\sum_{k\ impar}\binom{n}{k}=2^{n-1}$

Ejercicio 82 *Calcule* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k-n}$

Ejercicio 83 *Se considera el conjunto* $A=\{n\in\mathbb{N}\ /\ 1\leq n\leq 15\}$

1. *¿Cuántos subconjuntos de A contienen todos los números impares?*
2. *¿Cuántos subconjuntos de A contienen exactamente tres números impares?*
3. *¿Cuántos subconjuntos de A de ocho elementos contienen exactamente tres enteros impares?*

Ejercicio 84 *Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:* $\left.\begin{array}{l}\frac{V_{m,n+2}}{V_{m,n}}=20\\ V_{m,2}=110\end{array}\right\}$

Ejercicio 85 *Se consideran dos conjuntos finitos,* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ *y* $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$*, ¿cuántas aplicaciones hay de A en B?*

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 86 *Supóngase que en la cafetería de la escuela se ofertan los siguientes menús: hamburguesa, hamburguesa con queso y pizza. Como bebidas posibles se permiten, dentro del menú, refresco, agua o cerveza, además puede elegirse postre entre yogur o fruta. ¿Cuántos menús distintos están ofertando bajo las condiciones siguientes?*

1. *Se puede elegir un plato y una bebida.*
2. *Se puede elegir un plato, una bebida y un postre opcional.*
3. *Se puede elegir un plato, una bebida opcional y un postre opcional.*

Ejercicio 87 *Se quiere establecer un código de identificación de usuario con 7 símbolos que conste de 3 letras seguidas de 4 dígitos ¿se podría identificar con este código a una población de 76000000 de habitantes?*

Ejercicio 88 *El alfabeto Braille fué desarrollado a principios del siglo XIX por Louis Braille: Los caracteres, utilizados por los ciegos, constan de puntos en alto relieve. Las posiciones de los puntos se eligen en dos columnas verticales de tres puntos cada una. Debe aparecer al menos un punto en altorrelieve. ¿Cuántos caracteres Braille son posibles?*

Ejercicio 89 *¿Cuántos términos independientes contiene el desarrollo* $\left(x - 3y - \frac{1}{xy}\right)^6$*? ¿Cuál es el valor del coeficiente de* x^2y *de dicho desarrollo?.*

Ejercicio 90 *Sea* $1 \leq k \leq n$*, demuestra que:* $C_{n,k} = \frac{n}{k} C_{n-1,k-1}$*. Utiliza esta propiedad para demostrar que:* $\sum_{k=0}^{n} kC_{n,k} = n2^{n-1}$.

Ejercicio 91 *En un juego de baraja española (40 cartas, 4 palos) se reparten 7 cartas a cada jugador. Durante el desarrollo del juego se gana la mano cuando se tienen dos grupos de 3 y 4 cartas cada uno, con el mismo valor numérico para las cartas que pertenecen al mismo grupo. ¿De cuantas formas posibles se gana una mano? Si se consiguen 7 cartas consecutivas del mismo palo se gana el juego ¿de cuántas formas distintas puede hacerse esto?*

Ejercicio 92 *Calcular el número de sucesiones que se pueden formar con 3 fichas de parchís rojas, 5 fichas azules y 8 verdes. ¿Y si no puede haber dos fichas azules consecutivas? ¿Y si no puede haber dos del mismo color consecutivas?*

Ejercicio 93 *Determine el valor de las variables enteras* **W** *y* **P** *después de la ejecución de los siguientes segmentos de programa de MATLAB:*

```
W=0
for i=1:10
    for j=i:10
        for k=j:10
            W=W+1
        end
    end
end
```

```
P=0
for i=1:10
    for j=1:10
        for k=1:10
            P=P+1
        end
    end
end
```

Ejercicio 94 *Hallar el valor de* m *que verifica* $V_{m,2} = C_{m,2} + 820$.

Ejercicio 95 *Se extraen 5 cartas de una baraja de 40 cartas sin reemplazamiento ¿cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿y si la extracción se realiza con desplazamiento?*

Ejercicio 96 *En el desarrollo de* $\left(x - \frac{3}{x}\right)^{14}$ *encuentre el término independiente.*

Ejercicio 97 *Hallar el número de sucesiones de 20 términos que se pueden formar con los dígitos 0, 1 y 2, y tales que en todas aparece al menos un 0, un 1 y un 2.*

Ejercicio 98 *¿Cuántas cuaternas existen* (x, y, z, t) *que cumplan* $0 < x < y < z < t < 20$

Ejercicio 99 *Una caravana publicitaria consta de 6 coches y 6 furgonetas, siendo todos los vehículos de color diferente. ¿De cuántas formas diferentes puede organizarse la caravana con la condición de que no figuren 2 furgonetas juntas? Si se suprimen 2 furgonetas ¿cuántas caravanas diferentes se pueden formar que verifiquen la condición anterior?*

Ejercicio 100 *Si la venta anual media de vehículos en el reino de España es de 2000000 y que el actual código de matriculación (cada matrícula consta de 4 dígitos y 3 letras de las 20 posibles) se instauró en el año 2002 ¿En qué año será necesario cambiar el sistema de matriculación?*

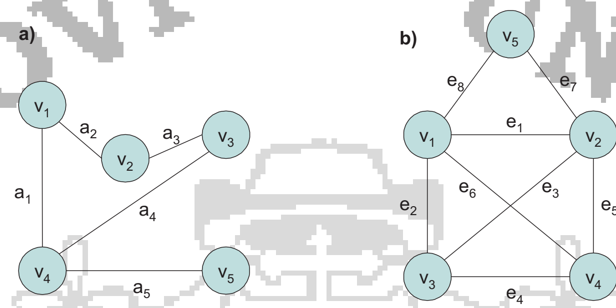
Ejercicio 101 *¿Cuál es el coeficiente de* xy *en el desarrollo* $\left(2x + 5y - \frac{2}{xy}\right)^5$*?*

PROBLEMAS DEL TEMA 4.- TEORÍA DE GRAFOS

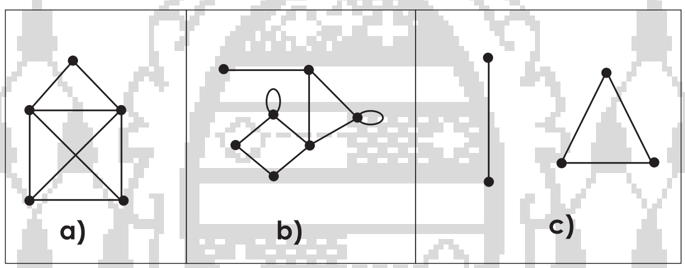
Ejercicio 102 *Dibujar un grafo que represente las rutas aéreas diarias de una compañía que ofrece los siguientes vuelos: Todos los días hay cuatro vuelos que unen Boston y Nueva York, dos Nueva York y Miami, uno entre Miami y Madrid, cuatro Madrid y Barcelona, uno Barcelona-Boston uno Madrid-Nueva York y uno Barcelona-Nueva York*

Ejercicio 103 *Dibuja los grafos* K_3 *y* K_5. *Dibuja todos los grafos dirigidos completos* K_3^*.

Ejercicio 104 *De los siguientes grafos, decida si son o no bipartidos. En caso de ser bipartidos, especifique los conjuntos de vértices ajenos:*



Ejercicio 105 *Dar las matrices de incidencia y adyacencia de los grafos de la figura. Dar también ambas*



matrices para el grafo completo K_5 *y para los grafos bipartidos completos* $K_{2,3}$

Ejercicio 106 *Para las matrices de adyacencia siguientes:*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Dibuje un grafo que le corresponda.

Ejercicio 107 *Para el grafo de la figura 5, determine:*

1. *un camino de b a d que no sea un recorrido*
2. *un recorrido de b a d que no sea camino simple*
3. *un camino simple de b a d*

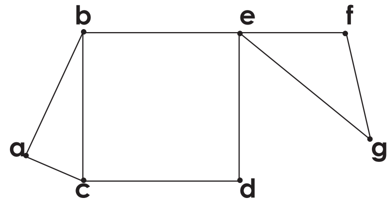
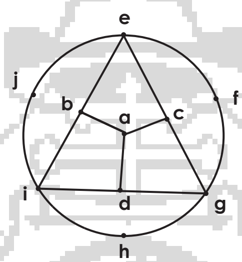


Figura 5: Grafo del ejercicio 107

4. *un camino cerrado que contenga a b que no sea circuito*
5. *un circuito de b a b que no sea ciclo*
6. *un ciclo de b a b*

Ejercicio 108 *Calcule cuántos caminos de longitud 2 hay en el grafo de la figura:*



¿Cuántos de estos caminos simples son cerrados?

Ejercicio 109 *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo no dirigido. Definimos una relación* $\Re$ *sobre* V *como* $a\Re b$ *si* $a = b$ *o si existe un camino simple en* G *de* a *a* b*. Demuestre que* $\Re$ *es una relación binaria de equivalencia. Describa la partición de* V *inducida por* $\Re$*.*

Ejercicio 110 *Sea* G *el grafo de la figura 6*

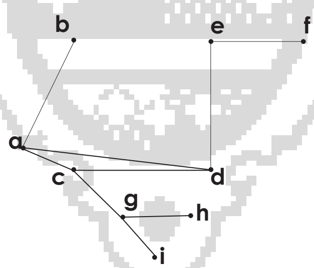


Figura 6: Grafo del ejercicio 110

1. *¿Cuántos subgrafos conexos de* G *tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?*
2. *Trace el subgrafo de* G *inducido por el conjunto de vértices* $\{b, c, d, e, f, g\}$
3. *Sea* e *la arista* $\{c, g\}$*. Trace el subgrafo* $G - e$
4. *Sean las aristas de* G*:* $e_1 = \{a, c\}$ *y* $e_2 = \{a, d\}$*. Trace los siguientes subgrafos:*
   a) $(G - e_1) - e_2$
   b) $(G - e_2) - e_1$
   c) $G - \{e_1, e_2\}$

5. *¿Cuántos subgrafos recubridores existen en G?*

6. *¿Cuántos subgrafos recubridores conexos hay en G?*

7. *¿Cuántos subgrafos recubridores generadores de G tienen el vértice a aislado? ¿y cuántos tienen el vértice b aislado?*

Ejercicio 111 *¿Existe un grafo no dirigido $G = (V, E)$ con 10 aristas y tal que $gr(v) = 4$, $\forall v \in V$? ¿y con 15 aristas?*

Ejercicio 112 *Dibujar, o probar la no existencia, de grafos simples sin lazos y cuyos vértices tengan grados:*

1. *2, 2, 2, 3*
2. *1, 2, 2, 3, 4*
3. *2, 2, 4, 4, 4*
4. *1, 2, 3, 4*

Ejercicio 113 *Para las figuras 7 y 8, diga, de forma razonada, si los grafos G_1 y G_2 son o no isomorfos.*

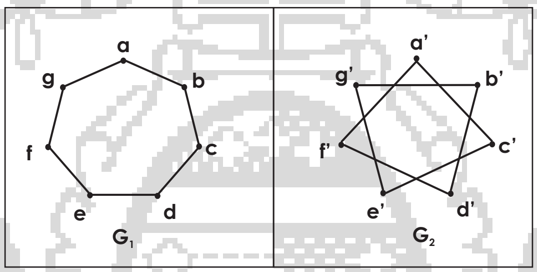


Figura 7: Grafo del ejercicio 113

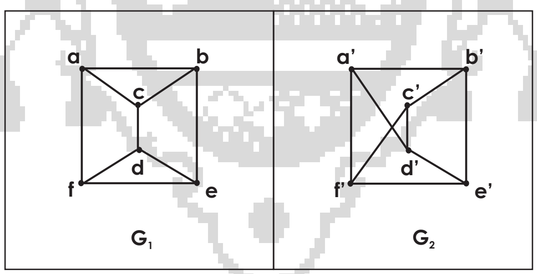


Figura 8: Grafo del ejercicio 113

Ejercicio 114 *Trace los complementarios de los grafos del ejercicio anterior.*

Ejercicio 115 *Demuestre que si G_1 y G_2 son grafos simples, G_1 es isomorfo a G_2 sí y sólo si lo son sus complementarios.*

Ejercicio 116 *En los grafos de las figuras 9 y 10, demuestre que son planos, volviendo a trazarlos de modo que no haya cruces entre aristas o bien que no son planos encontrando un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.*

Ejercicio 117 *Trace todos los árboles no isomorfos que tengan 6 vértices.*

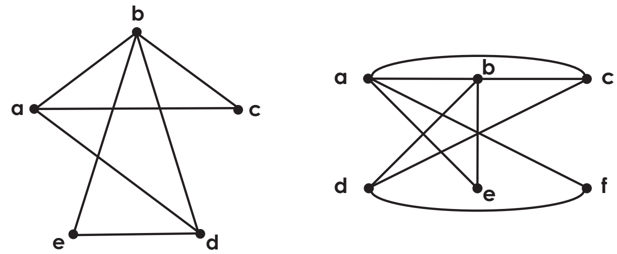


Figura 9: Grafos del ejercicio 116

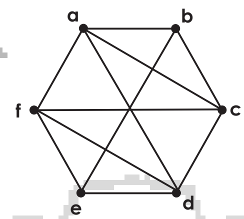


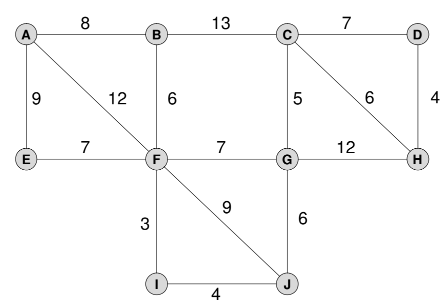
Figura 10: Grafos del ejercicio 116

Ejercicio 118 *Tres monedas tienen la misma apariencia pero una de ellas tiene distinto peso. Se dispone tan solo de una balanza de platillos sin pesas. Plantee el árbol de decisión del problema de encontrar la moneda diferente.*

Ejercicio 119 *Completa la siguiente tabla poniendo sí o no en cada casilla en blanco:*

Vértices repetidos	***Aristas repetidas***	***Abierto***	***Cerrado***	***Nombre***
				Recorrido
				Circuito
				Camino
				Ciclo
				Camino cerrado
				Camino simple

Ejercicio 120 *Describe el algoritmo de Kruskal para encontrar árboles recubridores de coste mínimo, y aplícalo al grafo de la figura*



Ejercicio 121 *Dado el grafo de la figura 11. Obtener:*

1. *El grafo complementario del grafo inducido por* $\{a, b, c, d, e, f\}$.
2. *Un camino euleriano, si lo tiene.*

3. *Un circuito euleriano, si lo tiene.*
4. *Un camino hamiltoniano, si lo tiene.*
5. *Un circuito hamiltoniano, si lo tiene.*
6. *Un árbol recubridor de coste mínimo.*

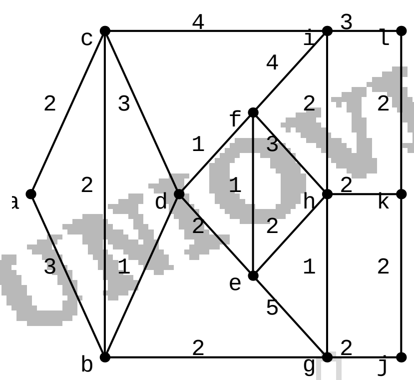


Figura 11: Grafo del ejercicio 121

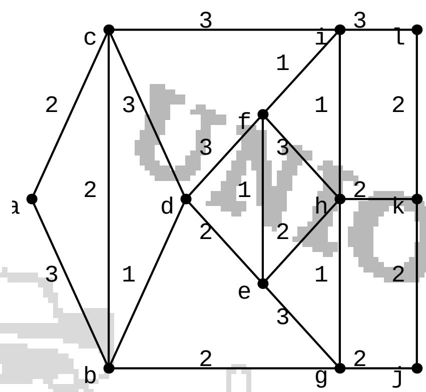
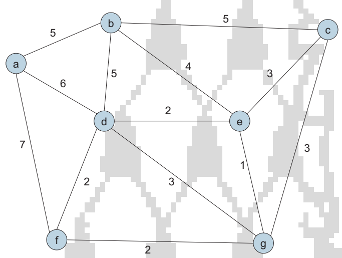
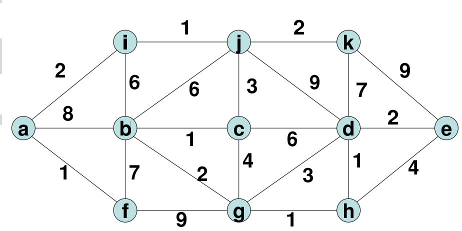


Figura 12: Grafo del ejercicio 132

Ejercicio 122 *Utiliza el algoritmo de Kruskal y el algoritmo de Prim para encontrar árboles recubridores de coste mínimo para los grafos:*





EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 123 *Supóngase que la fila i de la matriz de incidencia de un grafo G es nula ¿qué puede deducirse de esto? ¿y si esto ocurre en la matriz de adyacencia? Repita el ejercicio suponiendo que la que es nula es una columna.*

Ejercicio 124 *Se considera el grafo completo K_n, ¿cuántos caminos simples de longitud p existen entre cada par de vértices distintos? ¿y cuántos caminos simples de longitud p cerrados existen?*

Ejercicio 125 *Siete ciudades a, b, c, d, e, f y g están conectadas por un sistema de autopistas como sigue:*

- *La A22 va de a a c pasando por b*
- *La A33 va de c a d, luego pasa por b y continúa hacia f*
- *La A44 va de d por e hacia a*
- *La A55 va de f a b pasando por g*
- *La A66 va de g a d*

1. *Use los vértices para las ciudades y las aristas para los tramos de autopistas que las une, y dibuje un grafo dirigido que modele la situación.*
2. *Enumere los caminos simples de g a a*
3. *¿Cuál es el menor número de segmentos de autopistas que tendrían que cerrarse para interrumpir el paso de b a d?*
4. *¿Es posible salir de la ciudad c y regresar a ella, visitando una sola vez las otras ciudades?*
5. *¿Cuál es la respuesta del apartado anterior si no es necesario regresar a c?*
6. *¿Es posible comenzar en alguna ciudad y viajar por todas las autopistas exactamente una vez? (Se permite visitar una ciudad más de una vez y no es necesario regresar a la ciudad donde se inició el recorrido)*

Ejercicio 126 *Demuestre que un grafo no dirigido $G = (V, E)$ verifica que el número de vértices de grado impar debe ser par.*

Ejercicio 127 *Dar ejemplos de grafos con a lo más 6 vértices, que cumplan:*

a) es euleriano pero no es hamiltoniano

b) es hamiltoniano pero no euleriano

c) es euleriano y hamiltoniano

d) no es euleriano ni hamiltoniano

e) tenga un camino euleriano abierto pero no tenga un camino hamiltoniano abierto

f) tenga un camino hamiltoniano abierto pero no tenga un camino euleriano abierto

g) tenga un camino euleriano abierto y otro hamiltoniano abierto

h) no tenga un camino euleriano abierto ni uno hamiltoniano abierto.

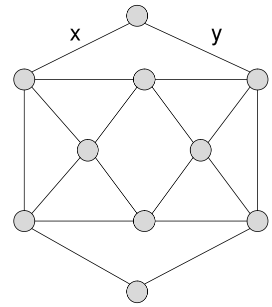
Ejercicio 128 *Hallar todos los grafos simples sin lazos no isomorfos:*

1. *Con 8 vértices y 26 aristas*
2. *Con 20 vértices y 188 aristas*

Ejercicio 129 *Demostrar que un grafo completo de n aristas, K_n, tiene exactamente $\sum_{i=0}^{n-1} i$ aristas.*

Ejercicio 130 *Debemos ordenar con un cierto criterio tres elementos a, b, c Plantee el árbol de decisión del problema y el mayor número de comparaciones que se debe hacer para ordenar.*

Ejercicio 131 *Define grafo conexo, ¿es conexo el grafo de la figura? Define camino euleriano ¿posee un camino euleriano el grafo de la figura? Define grafo euleriano ¿Es euleriano el grafo de la figura? Repita el problema con el grafo obtenido de eliminar las aristas x e y así como el vértice incidente con ambas.*



Ejercicio 132 *Dado el grafo de la figura 12. Obtener:*

1. *El grafo complementario del grafo inducido por $\{a, b, c, d, e, f\}$.*
2. *Un camino euleriano, si lo tiene.*
3. *Un circuito euleriano, si lo tiene.*
4. *Un camino hamiltoniano, si lo tiene.*
5. *Un circuito hamiltoniano, si lo tiene.*
6. *Un árbol recubridor de coste mínimo.*

Ejercicio 133 *¿Es plano el grafo de la figura 13? Si lo es, dar una representación plana del grafo, sino decir porqué.*

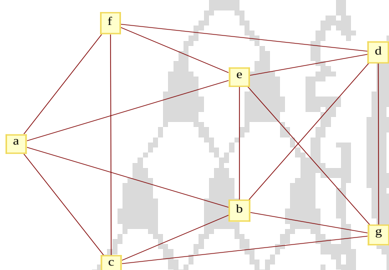


Figura 13: Grafo del problema 133

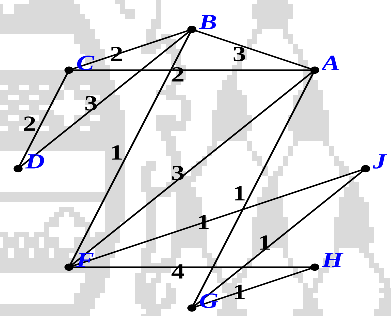


Figura 14: Grafo del problema 134

Ejercicio 134 *Sea el grafo de la figura 14.*

1. *¿Existe un recorrido euleriano? Si lo hay, dar uno.*
2. *¿Es un grafo euleriano? Si lo es, dar un circuito euleriano.*
3. *¿Es un grafo hamiltoniano? Si lo es, dar un ciclo hamiltoniano.*
4. *Obtener un árbol generador de coste mínimo.*
5. *¿Es un grafo plano? Si lo es, dar una representación plana del grafo, sino decir porqué.*