Matemática Discreta

EXAMEN FINAL

Febrero 2005

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (tarde) y de Gestión

Fecha: 7 de febrero de 2005 **Tiempo: 2 horas y media.**

El examen está formado por seis problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar una única hoja resumen A4 de teoría, pero no está permitido el uso de calculadoras.

Ejercicio 1: Formalizar el siguiente razonamiento de lógica proposicional (3pts.) y comprobar si es o no correcto usando el método de refutación (7pts.):

Es suficiente que no llueva ni haga frío para que los imbéciles bailen como locos. Los imbéciles bailan como locos. En conclusión; o llueve o hace frío.

Usar la siguiente notación: p : los imbéciles bailan como locos, q : llueve, r : hace frío.

$$P_1 : (\neg q \wedge \neg r) \longmapsto p$$

$$P2 : p$$

$$C : q \vee r$$

La fórmula a verificar es por tanto:

$$((\neg q \wedge \neg r) \longmapsto p) \wedge p \longmapsto q \vee r$$

Si intentamos, usando refutación, encontrar un caso para el que la fórmula sea falsa, hemos de imponer $((\neg q \wedge \neg r) \longmapsto p)$ verdadero y $q \vee r$ falso. Pero $q \vee r$ falso implica q falso y r falso, si damos a p el valor verdadero no hay contradicción alguna, luego para este caso la fórmula es falsa. Así, ese razonamiento no es una tautología.

Ejercicio 2: (10 pts.) Construir un algoritmo que

i. Reciba como entrada una lista de n números enteros

ii. De como salida dos valores: el número de múltiplos de 3 y el número de múltiplos de 15 que hay en dicha lista.

iii. No utilice nigún bucle `for`.

iv. Tenga complejidad lineal.

Entrada: $a_1, \ldots, a_n$
$b := 0,$
$c := 0,$
$i := 1,$
while $i \leq n$
if $a_i mod 3 = 0$ *then* $b := b + 1$
if $a_i mod 15 = 0$ *then* $c := c + 1$
$i := i + 1$
Salida: c, b

Ejercicio 3:

- a) (5 puntos) Calcula, utilizando el algoritmo de Euclides, dos números enteros α y β tales que $\alpha \cdot 234 + \beta \cdot 63 = 9$
- b) (5 puntos) Calcula el valor de $2^{21} \mod 7$.

a) Utilizando el algoritmo de Euclides, vemos que $234 = 63 \cdot 3 + 45$, $63 = 45 + 18$, $45 = 18 \cdot 2 + 9$ *y* $18 = 9 \cdot 2$. *Despejando los restos en las ecuaciones, obtenemos que:*

$$3 \cdot 234 - 11 \cdot 63 = 9.$$

b) $2^{21} \mod 7 = 2^{3 \cdot 7} \mod 7 = (2^3)^7 \mod 7 = 1^7 \mod 7 = 1 \mod 7$

Ejercicio 4: En una cesta hay canicas de 3 colores; en concreto, hay 50 canicas azules, 20 rojas y 45 blancas. Calcular la probabilidad de que al extraer dos canicas simultáneamente al azar las dos sean

a) (2 pts.) blancas,

b) (4 pts.) del mismo color,

c) (4 pts.) de colores distintos.

a) $\dfrac{\binom{45}{2}}{\binom{45+20+50}{2}}$

b) $\dfrac{\begin{pmatrix} 45 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 45+20+50 \\ 2 \end{pmatrix}}$

c)$1 - b)$

Ejercicio 5: Considerar el grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{7, 6\}\}$

a) (5 puntos) ¿Es este grafo euleriano? En caso afirmativo, encuentra un camino euleriano cerrado en G según algún procedimiento visto en clase.

b) (5 puntos) ¿Posee G árbol generador? En caso afirmativo, encuentra un árbol generador para G según algún procedimiento visto en clase.

a) Sí, es euleriano, pues tiene todos sus vértices de grado par. Un camino euleriano es, por ejemplo, $1, 2, 3, 1, 4, 6, 3, 4, 5, 6, 7, 5, 1$.

b) G es conexo, luego posee árbol generador. Un ejemplo es el árbol-línea $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Ejercicio 6:

a) (5 puntos) Sean
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
y
$$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 4), (3, 5)\}$$
una relación binaria en A. Determina si verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Determina si es una relación de equivalencia. Determina si es una relación de orden.

b) (5 puntos) Calcular la clausuras reflexiva, simétrica y transitiva de la relación con matriz de adyacencias asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) La relación no es reflexiva (el 2 *no se relaciona con sí mismo), ni simétrica (pues* 2 *se relaciona con* 3 *y no al revés), ni transitiva, pues* 2 *se relaciona con* 3 *y* 3 *con* 4*, pero no* 2 *con* 4*. Así, no es una relación ni de equivalencia, ni de orden.*

b) Clausura reflexiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Clausura simétrica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Clausura transitiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$