

Matemática Discreta I

Examen

Martes 26 de julio de 2011

Número de examen

Nombre y Apellido

Cédula de Identidad

RESPUESTAS					No completar		
1	2	3	4	5	6	7	8

EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 40 puntos).

Correctas: 8 puntos, Incorrectas: -2 puntos, Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 ¿Cuántos reordenamientos de la palabra FIEBRE no dejan letras en su posición original? **Opciones:** (A) $D_6 - 2D_5 - D_4$; (B) $D_6/2$; (C) $D_6 - D_5$; (D) $D_6 - 2D_5$; (E) $D_6 - 2D_5 + D_4$.

EJERCICIO 2 Se considera un grafo $G = (V, E)$ no dirigido sin lazos, tal que $|V| = 8$ y admite un circuito euleriano. El grafo G en esas condiciones que tiene la mayor cantidad de aristas posibles cumple: **Opciones:**

- (A) $|E| = 52$.
- (B) $|E| = 28$.
- (C) $|E| = 24$.
- (D) $|E| = 56$.
- (E) $|E| = 20$.

EJERCICIO 3 Llegan 6 amigos mochileros a un hotel y solo restan 3 cuartos libres (el 108, el 206 y el 303), con 4 camas cada uno. ¿De cuántas formas pueden distribuirse si todos los cuartos quedan ocupados? **Opciones:** (A) 540; (B) 180; (C) 729; (D) 90; (E) 924.

EJERCICIO 4 Sea a_n , $n \geq 0$ la cantidad de números de n dígitos formados con los dígitos 1, 2 y 3, tales que después de un 3 no puede haber ni un 1 ni un 2. Suponer que $a_0 = 0$. ¿Cuál es la función generatriz asociada a $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$? **Opciones:**

- (A) $\frac{(2x^2 - 6x + 3)x}{(1-x)(1-2x)}$.
- (B) $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$.
- (C) $\frac{x}{1-2x} + 2x$.
- (D) $\frac{3x}{1-3x}$.
- (E) $\frac{(3-2x)x}{(1-x)(1-2x)}$.

EJERCICIO 5 Una empresa está organizando un nuevo Departamento, aún sin conocer qué empleados trabajarán en él. El Departamento tendrá 6 técnicos, de los cuales 3 serán cadetes (nivel inferior jerárquico) y uno jefe del grupo. ¿Cuántas formas jerárquicas puede tomar este departamento si cada persona puede tener a lo sumo un superior inmediato? **Opciones:** (A) 6; (B) 7; (C) 8; (D) 10; (E) 12.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 60 puntos).

EJERCICIO 6 (18 puntos)

1. Determinar qué números enteros positivos menores a quince se pueden escribir como suma de treses y ochos. Por ejemplo, $3 = 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0$, $6 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 0$, $11 = 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1$.
2. Demostrar por Inducción Completa que todo entero positivo mayor a trece se puede escribir como suma de treses y ochos.

EJERCICIO 7 (24 puntos)

Un vector $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ se dice *graficable* si existe un grafo conexo sin lazos ni aristas múltiples $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $gr(v_i) = d_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

1. Probar que $(2, 2, 2, \dots, 2) \in \mathbb{N}^n$ es graficable $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Mostrar que $(5, 4, 3, 3, 2)$ y $(3, 1, 1, 1, 1, 1)$ no son graficables.
3. Probar que si $(d_1, d_2, \dots, d_i, d_{i+1}, \dots, d_n)$ es graficable, entonces $(i, d_1 + 1, d_2 + 1, \dots, d_i + 1, d_{i+1}, \dots, d_n)$ también lo es.

EJERCICIO 8 (18 puntos)

A lo largo de 10 días, un alumno de Matemática Discreta I estudió al menos una hora cada día, pero no más de 15 horas en todo el período. Demuestre que existieron días consecutivos en los que el alumno estudió exactamente 3 horas.