Matemática Discreta

HOJA 4 RESUELTA

---

1) Un cajón contiene ocho calcetines blancos y ocho calcetines negros. Si estamos a oscuras, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que tenemos que coger del cajón para estar seguros de tener dos calcetines del mismo color? (Nota: la respuesta es muy sencilla.)

Hace falta coger solamente 3 calcetines.

2) Doce personas se presentan a una entrevista de trabajo. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir y ordenar las primeras seis personas que van a ser entrevistadas?

Tenemos que contar el número de selecciones ordenadas de seis personas en el conjunto de las doce personas:

$$V_{12,6} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 665280.$$

3) ¿Cuántos números impares hay entre 100 y 999 con todas sus cifras distintas?

Los números impares entre 100 y 999 tienen la primera cifra en el conjunto $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, la segunda en el conjunto $II = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y la tercera en el conjunto $III = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Para contar los números impares entre 100 y 999, que tienen todas las cifras distintas, vamos a distinguir entre dos casos:

caso 1: si la segunda cifra es igual a 0, hay $5 \times 8 = 40$ posibilidades, ya que, elegida la tercera cifra en III, podemos elegir para la primera sólo entre 8 de los elementos de I.

caso 2: si la segunda cifra es distinta de 0, hay $5 \times 8 \times 7 = 280$ posibilidades, ya que, elegida la tercera cifra en III, podemos elegir para la segunda sólo entre 8 los elementos de II y, entonces, sólo entre 7 de los elementos de I para la primera cifra.

En total, hay 320 números impares entre 100 y 999, que tienen todas las cifras distintas.

4) Una rueda de la fortuna está marcada con las cifras 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 y se hace girar tres veces, obteniendo un número de tres cifras, cuya primera cifra puede ser 0.
¿De estos números, cuántos se pueden obtener que tengan las tres cifras distintas?

El número de ternas de cifras distintas que se pueden obtener es el número de selecciones ordenadas de tres elementos en el conjunto de 10 elementos

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Por tanto es $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

5) Un restaurante recibe cinco pedidos que tienen que ser llevados a cinco mesas distintas por tres camareros. ¿De cuántas formas distintas se pueden asignar los

cinco pedidos a los tres camareros, si cada uno de ellos va a llevar al menos un pedido?

Hay dos formas posibles de escribir cinco como la suma de tres números mayores o iguales a 1:

$$1 \quad 1 \quad 3 \qquad \text{y} \qquad 1 \quad 2 \quad 2.$$

En nuestro problema, la primera forma se corresponde a elegir primero al camarero que va a llevar tres pedidos (tres posibilidades) y después asignar una mesa a cada uno de los dos restantes camareros (5 posibilidades para el primero y 4 para el segundo). En total hay $3 \cdot PR_5^3 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ posibilidades.

La segunda forma se corresponde a elegir primero al camarero que va a llevar un solo pedido (tres posibilidades) y después asignar las mesas a cada uno de los tres camareros. En total hay $3 \cdot PR_5^{2,2} = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 90$ posibilidades.

Se sigue que hay 60+90=150 formas distintas de asignar los cinco pedidos a los tres camareros.

6) La carta de un restaurante contiene siete aperitivos, 10 entradas y cinco postres distintos.

¿Cuántas cenas distintas se pueden comer, formadas por tres aperitivos distintos entre sí, dos entradas distintas entre sí y un postre?

¿Cuántas cenas distintas se pueden comer formadas por tres aperitivos, dos entradas y un postre?

La respuesta a la primera pregunta es:

$$C_{7,3} \cdot C_{10,2} \cdot C_{5,1} = \binom{7}{3} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{5}{1} = 35 \cdot 45 \cdot 5 = 7875.$$

La respuesta a la segunda pregunta es:

$$CR_{7,3} \cdot CR_{10,2} \cdot C_{5,1} = \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{2} \cdot \binom{5}{1} = 84 \cdot 55 \cdot 5 = 23100.$$

7) Un grupo de cinco personas tiene que sacarse una foto, pero dos de ellas se han peleado y no quieren posar una al lado de la otra.

¿De cuántas formas distintas se pueden alinear las cinco personas para sacarse la foto sin que las dos personas de la pelea aparezcan una al lado de la otra?

El grupo de cinco se puede alinear de todas las posibles maneras, que son $P_5 = 5!$, exceptuando aquellas en las que los dos peleados resulten estar contiguos. Dos personas estarán al lado una de la otra en la foto sólo si ocupan uno de los pares de posiciones 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4, 4 y 5. Para cada uno de ellos hay dos posibilidades, que se obtienen intercambiando la posición de las dos personas. Una vez fijada la posición de las dos personas de la pelea, hay $P_3 = 3!$ formas distintas de asignar posiciones a las restantes tres personas.

Por tanto, hay $5! - 8 \cdot 3!$ maneras posibles.

8) Una urna contiene 16 bolas de las cuales 6 son rojas, 7 son blancas y 3 son negras.

Si se extraen 4 bolas de la urna, calcula la probabilidad de que:

a) todas las bolas extraídas sean rojas,

b) ninguna de las bolas extraídas sea roja,

c) entre las extraídas, haya al menos una bola de cada color.

Sea X la variable aleatoria que asocia a cada resultado de la extracción de las cuatro bolas el número de bolas rojas. Entonces,

a) $p(X=4)=\dfrac{C_{6,4}}{C_{16,4}}$,

b) $p(X=0)=\dfrac{C_{10,4}}{C_{16,4}}$,

c) $\dfrac{C_{6,2}}{C_{16,4}}\cdot 7\cdot 3+\dfrac{C_{7,2}}{C_{16,4}}\cdot 6\cdot 3+\dfrac{C_{3,2}}{C_{16,4}}\cdot 6\cdot 7=21\cdot\dfrac{C_{6,2}}{C_{16,4}}+18\cdot\dfrac{C_{7,2}}{C_{16,4}}+42\cdot\dfrac{C_{3,2}}{C_{16,4}}$.

9) Se extraen cinco cartas de una baraja de 52 cartas.
¿Cuál es la probabilidad que las 5 cartas sean todos oros, si cuatro lo son?

Definamos los sucesos
S: las 5 cartas son oros y
S': 4 cartas extraídas son oros.
Entonces $S\subset S'$ y tenemos que calcular la probabilidad condicionada:

$$p(S|S')=\frac{p(S\cap S')}{p(S')}=\frac{p(S)}{p(S')}=\frac{C_{13,5}}{C_{13,4}\cdot C_{39,1}+C_{13,5}}.$$

10) Sean A y B sucesos con probabilidades $p(A)=\dfrac{1}{3}$, $p(B)=\dfrac{1}{4}$ y $p(A|B)=\dfrac{2}{3}$. Calcula $p(\bar{B}|\bar{A})$. (Aquí $\bar{S}$ es el suceso complementario a S.)

$$p(\bar{B}|\bar{A})=\frac{p(\bar{B}\cap\bar{A})}{p(\bar{A})}=\frac{p(\overline{A\cup B})}{p(\bar{A})}=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}.$$

Ahora, ya que

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)},\qquad p(A\cap B)=p(A|B)\cdot p(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6},$$

podemos calcular

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12},$$

y, finalmente,

$$p(\bar{B}|\bar{A})=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}=\frac{1-\frac{5}{12}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{8}.$$

11) Si tiramos un dado de ocho caras (que están marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) cuatro veces, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea 8 al menos una vez?

La probabilidad de que el resultado sea 8 al menos una vez es 1 menos la probabilidad de que el resultado no sea nunca 8, es decir, es $1-(\frac{7}{8})^4=\dfrac{1695}{4096}\approx 0,41$.

12) Se lanza una moneda seis veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras obtenidas en los primeros tres lanzamientos sea igual al número de caras en los últimos tres.

El número de caras obtenidas en los primeros tres lanzamientos se calcula como en un experimento de Bernoulli con $n = 3$ y $p = \frac{1}{2}$. Sea X la variable aleatoria que asocia a cada resultado de los primeros tres lanzamientos de la moneda el número de caras obtenidas. De forma similar, sea Y la variable aleatoria que asocia a cada resultado de los últimos tres lanzamientos el número de caras obtenidas. Entonces,

$$\begin{aligned}
p(X = 0) = p(Y = 0) &= \binom{3}{0} \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}, \\
p(X = 1) = p(Y = 1) &= \binom{3}{1} \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}, \\
p(X = 2) = p(Y = 2) &= \binom{3}{2} \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}. \\
p(X = 3) = p(Y = 3) &= \binom{3}{3} \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
p(X = Y) = p(X = Y = 0) + p(X = Y = 1) + p(X = Y = 2) + p(X = Y = 3) = \\
= (\frac{1}{8})^2 + (\frac{3}{8})^2 + (\frac{3}{8})^2 + (\frac{1}{8})^2 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$