

## Capítulo 2

# Combinaciones y permutaciones

1. Selecciones ordenadas y no ordenadas
2. Algunos ejemplos de aplicación
3. Propiedades de los coeficientes binomiales

En este capítulo se exponen los problemas más simples de enumeración que forman parte de la combinatoria elemental. Los modelos básicos se basan en la enumeración de selecciones ordenadas y no ordenadas, con o sin repetición, de los elementos de un cierto conjunto. En la sección 1 se obtienen las fórmulas de enumeración de estas selecciones. A pesar de su simplicidad, estos problemas de enumeración permiten resolver una diversidad considerable de problemas, de los cuales hay algunos ejemplos interesantes en la sección 2: el número de palabras que pueden formarse a partir de un alfabeto, el número de soluciones de ciertas ecuaciones enteras, el número de aplicaciones entre dos conjuntos, la fórmula del binomio y problemas relacionados, y los problemas de distribuciones. Los llamados coeficientes binomiales tienen una importancia singular y permiten expresar muchos de los resultados de enumeración; la tercera sección está dedicada a analizar las propiedades más importantes de estos números.

### 2.1 Selecciones ordenadas y no ordenadas

Comenzaremos con un recorrido por la combinatoria elemental contando de cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar un cierto número de elementos de un conjunto. Para contar este número es preciso fijar los criterios con que se diferencia una selección de otra. Aquí tendremos en cuenta dos tipos de criterios: el orden de los elementos y el número de veces que puede aparecer cada uno.

Si distinguimos dos selecciones: cuando tienen elementos diferentes, o bien, cuando los elementos aparecen en un orden diferente, hablaremos de *permutaciones*. En cambio, si no distinguimos dos selecciones que sólo difieren en la ordenación de sus elementos, entonces hablaremos de *combinaciones*. Por otra parte, si cada elemento puede aparecer como mucho una vez, hablaremos de selecciones *sin repetición*, mientras que, si no hay esta restricción, hablaremos de selecciones *con repetición*. Por ejemplo, en el conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

podemos formar 16 permutaciones, con repetición, de dos elementos,

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

12 permutaciones, sin repetición, de dos elementos,

	12	13	14
21		23	24
31	32		34
41	42	43	

10 combinaciones, con repetición, de dos elementos,

11	12	13	14
	22	23	24
		33	34
			44

y 6 combinaciones, sin repetición, de dos elementos,

	12	13	14
		23	24
			34

En esta sección obtendremos una fórmula para la enumeración del número de selecciones diferentes de  $k$  elementos, tomados de un conjunto  $X$  de  $n$  elementos, que identificaremos con  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Lo que resulta más sencillo de contar es el número de selecciones ordenadas con repetición de  $k$  elementos. Llamamos  $PR_n^k$  a este número, que se lee “permutaciones con repetición de  $n$